Exercice 1 ($\simeq 3,5$ points).

1. Calcul de $\ell = \dfrac{\dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{5}{6}}{\dfrac{1}{3} + 7}$.

$$\ell = \frac{\dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{12}}{\dfrac{1}{3} + \dfrac{21}{3}} = \frac{\dfrac{16}{12} - \dfrac{5}{12}}{\dfrac{22}{3}} = \frac{\dfrac{11}{12}}{\dfrac{22}{3}} = \frac{11}{12} \times \frac{3}{22}.$$

Finalement

$$\ell = \frac{3 \times 11}{12 \times 22} = \frac{\color{blue}{3} \times \color{red}{11}}{2 \times 2 \times \color{blue}{3} \times 2 \times \color{red}{11}} = \frac{1}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{8}.$$

2. Détermination d'une équation cartésienne de la droite (AB) sachant que $A(-3;5)$ et $B(2;4)$.

Comme $x_A \neq x_B$, la droite (AB) n'est pas verticale et on peut affirmer qu'une équation cartésienne de (AB) s'écrit sous la forme $y = ax + b$ où a et b sont deux constantes réelles à déterminer.
Or $A(-3;5)$ appartient à la droite (AB) ; donc $5 = -3a + b$.
De même, $B(2;4)$ appartient à la droite (AB) ; donc $4 = 2a + b$.
Avec cette dernière égalité, on obtient $b = 4 - 2a$ que l'on peut remplacer dans l'égalité $5 = -3a + b$.
Cela nous donne $5 = -3a + (4 - 2a)$, c'est-à-dire $5 = -3a + 4 - 2a$, c'est-à-dire encore $5 - 4 = -3a - 2a$.
D'où $1 = -5a$ puis $a = -\dfrac{1}{5}$.
Comme $b = 4 - 2a$, on obtient $b = 4 + 2 \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{20}{5} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{22}{5}$.

Conclusion. Une équation cartésienne de la droite (AB) est $y = -\dfrac{1}{5}x + \dfrac{22}{5}$.

Remarque 1. En utilisant la méthode ci-dessus, on constate qu'il n'y a aucun besoin de savoir que le coefficient directeur de la droite est donné par la formule

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Remarque 2. En utilisant la méthode ci-dessus, on constate qu'il n'y a aucun besoin de déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Néanmoins, pour ceux qui tiennent absolument à calculer les coordonnées de ce vecteur (cela concerne beaucoup trop d'étudiants qui ne savent même pas quoi faire de ces coordonnées !), il est essentiel de ne pas confondre les notations entre :
- vecteur $\overrightarrow{AB}$
- distance AB
- droite (AB).

Exercice 2 ($\simeq 8$ points). On considère f la fonction définie par : $f(x) = x\sqrt{3-2x}$

1. On sait que $\sqrt{t}$ est définie si et seulement si $t \geqslant 0$.
Donc $f(x)$ est définie ssi $3-2x \geqslant 0$,
ssi $3 \geqslant 2x$,
ssi $\frac{3}{2} \geqslant x$,
ssi $x \leqslant \frac{3}{2}$.
Conclusion. L'ensemble de définition D_f de la fonction f est : $D_f = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$.

Remarque 1. Pour démarrer, il ne faut surtout pas écrire « $f(x)$ est définie ssi $\sqrt{3-2x} \geqslant 0$ ». En effet, ce qui compte pour l'ensemble de définition, c'est ce qu'il y a dans la racine carrée, ce n'est pas le résultat de la racine carrée.

Remarque 2. Pour rédiger la conclusion, on a plusieurs options :
- on peut écrire comme ci-dessus « l'ensemble de définition de f est : $D_f = \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ » ;
- on peut écrire « f est définie sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ » ;
- on peut écrire « $f(x)$ est définie pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right]$ ».
Mais il ne faut surtout pas écrire un mélange des options précédentes !

2. Compte tenu des propriétés de la fonction racine carrée, la fonction $x \mapsto \sqrt{3-2x}$ est définie là où $3-2x \geqslant 0$, mais elle est dérivable là où $3-2x > 0$. Par conséquent, elle est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$.
Ainsi f est dérivable sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$.

Dans le but de dériver f sur $\left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, on constate d'abord que f est un produit de fonctions.

Posons $u(x) = x$ et $v(x) = \sqrt{3-2x}$.
On obtient immédiatement $u'(x) = 1$.
Pour dériver v, on écrit $v(x) = \sqrt{3-2x} = \sqrt{w(x)}$ avec $w(x) = 3-2x$. Comme $w'(x) = -2$, on obtient :

$$v'(x) = \frac{w'(x)}{2\sqrt{w(x)}} = \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$$

D'où, pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{3}{2}\right[$, on a :

$$f'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x) = 1 \times \sqrt{3-2x} + x \times \frac{-1}{\sqrt{3-2x}}$$

Afin de tout mettre au même dénominateur, on écrit :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3-2x} \times \sqrt{3-2x}}{\sqrt{3-2x}} - \frac{x}{\sqrt{3-2x}}$$

ce qui donne

$$f'(x) = \frac{3-2x}{\sqrt{3-2x}} - \frac{x}{\sqrt{3-2x}} = \frac{3-2x-x}{\sqrt{3-2x}} = \frac{3-3x}{\sqrt{3-2x}}$$

On constate qu'en posant $a = -3$ et $b = 3$, on a bien :

$$f'(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{3-2x}}$$

On aurait également pu écrire
$$f'(x) = \frac{3(1-x)}{\sqrt{3-2x}}$$

3. On a vu précédemment que $f'(x) = \dfrac{3-3x}{\sqrt{3-2x}}$. Comme cette expression est un quotient, on va déterminer le signe de $f'(x)$ en dressant un tableau de signes. Pour cela, on a besoin de :

   - $3 - 3x \geqslant 0$ ssi $3 \geqslant 3x$, ssi $1 \geqslant x$, ssi $x \leqslant 1$.

   - l'expression $\sqrt{3-2x}$ est toujours positive ou nulle sur D_f car, par définition de la racine carrée, pour tout réel $t \geqslant 0$, l'expression $\sqrt{t}$ est toujours positive ou nulle.

   - Conclusion. Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$
$3-3x$		$+$	0	$-$	
$\sqrt{3-2x}$		$+$		$+$	0
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Quelques précisions sur les valeurs au bout des flèches. On a :

- $f(1) = 1 \times \sqrt{1} = 1$;

- $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} \times \sqrt{3-3} = \dfrac{3}{2} \times 0 = 0$.

- Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\sqrt{3-2x}\right)$.

  Par produit et différence des limites, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} (3-2x) = +\infty$. Donc, en posant $t = 3 - 2x$, on a par composition des limites $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{3-2x} = \lim\limits_{t \to +\infty} \sqrt{t} = +\infty$.
  Par ailleurs, $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$. Donc, par produit des limites, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Exercice 3 ($\simeq 8,5$ points).

1. Résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation : $2t^2 - t - 1 = 0$.

   On commence par calculer le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 1 + 8 = 9$.
   Comme $\Delta > 0$, on obtient deux solutions réelles pour l'équation :

$$t_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1-3}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 2} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

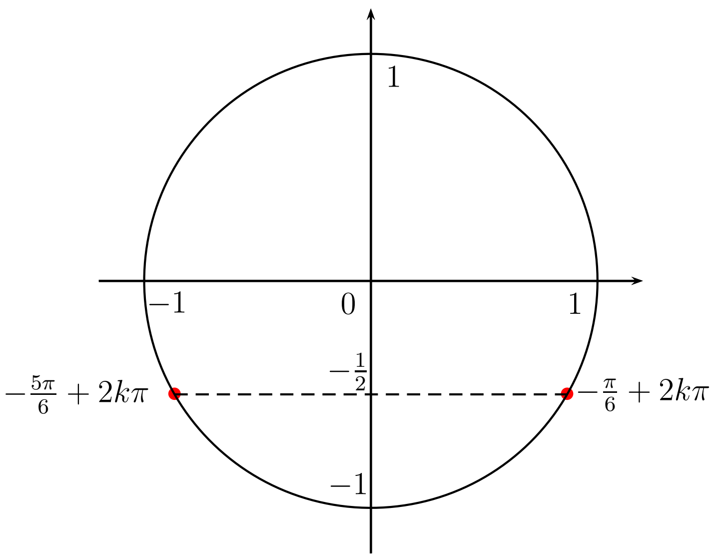
   Remarque. La variable dans l'équation étant t, c'est mieux d'appeler les solutions t_1 et t_2. Beaucoup trop d'étudiants les ont notées x_1 et x_2 et se sont emmêlé les pinceaux à la question 2...

2. Détermination des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\sin^2 x = \sin x + 1$.

   Tout d'abord, on constate que l'équation s'écrit aussi : $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$.
   En posant $t = \sin x$, l'équation devient : $2t^2 - t - 1 = 0$, qui est exactement l'équation de la question 1. D'après la question 1, on a donc :
   $2t^2 - t - 1 = 0$ ssi $t = -\dfrac{1}{2}$ ou $t = 1$.
   Par conséquent,
   $2\sin^2 x = \sin x + 1$ ssi $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ ou $\sin x = 1$.

   - Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = -\dfrac{1}{2}$.

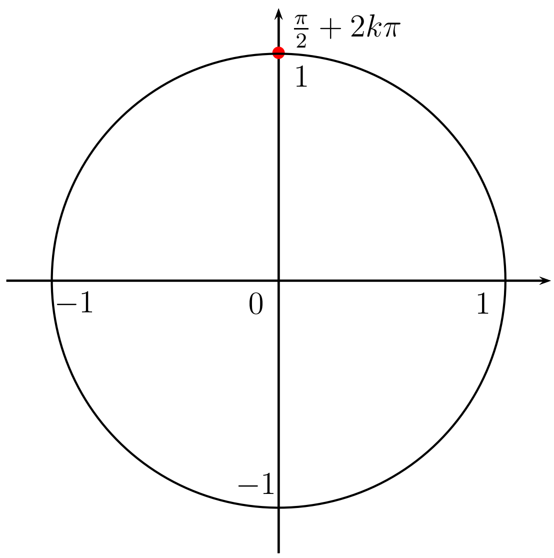
   En utilisant un cercle trigo (voir points rouges)



   on obtient : $\sin x = -\dfrac{1}{2}$ ssi $x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

   - Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = 1$.

   En utilisant un cercle trigo (voir point rouge)



on obtient : $\sin x = 1$ ssi $x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

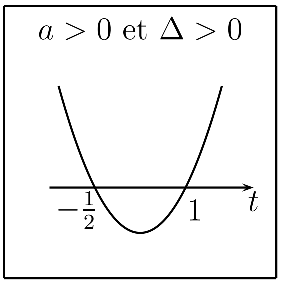
- Conclusion.

$$2\sin^2 x = \sin x + 1 \text{ si et seulement si } \begin{cases} x = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Remarque. La conclusion précédente est largement suffisante. Il n'est absolument pas obligatoire d'écrire en conclusion $S = \{...\}$.

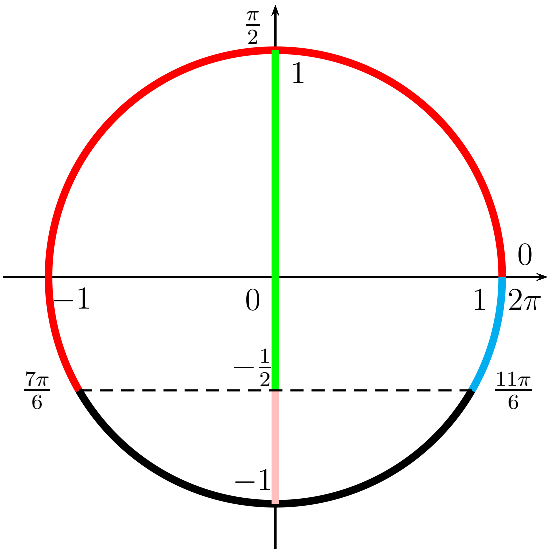
3. Détermination des solutions sur $[0; 2\pi]$ de l'inéquation : $2\sin^2 x < \sin x + 1$.
   En suivant un raisonnement analogue à celui de la question 2, on peut écrire :
   $2\sin^2 x < \sin x + 1$ ssi $2\sin^2 x - \sin x - 1 < 0$
   ssi $2t^2 - t - 1 < 0$ avec $t = \sin x$.

   Or, avec la question 1, on a vu que le polynôme $2t^2 - t - 1$ avait deux racines : $-\frac{1}{2}$ et 1.
   Comme $a = 2 > 0$ et $\Delta = 9 > 0$, la parabole d'équation $y = 2t^2 - t - 1$ est représentée sous cette forme :

   Par lecture graphique, on peut affirmer que $2t^2 - t - 1 < 0$ ssi $-\dfrac{1}{2} < t < 1$.
   On en déduit que
   $2\sin^2 x < \sin x + 1$ ssi $-\dfrac{1}{2} < t < 1$ avec $t = \sin x$
   ssi $-\dfrac{1}{2} < \sin x < 1$

Par lecture du cercle trigo et en n'oubliant pas qu'on travaille sur $[0;2\pi]$:



on constate alors que :

$-\dfrac{1}{2} < \sin x < 1$ (zone verte) si et seulement si $0 \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$ (première partie de la zone rouge)

ou $\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{7\pi}{6}$ (seconde partie de la zone rouge)

ou $\dfrac{11\pi}{6} < x \leqslant 2\pi$ (zone bleue).

Autrement dit, l'ensemble S des solutions sur $[0;2\pi]$ de l'inéquation $2\sin^2 x < \sin x + 1$ est

$$S = \left[0;\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2};\frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6};2\pi\right].$$

Remarque. Il ne fallait pas oublier d'exclure $\dfrac{\pi}{2}$ de l'ensemble des solutions car les inégalités étaient strictes dans $-\dfrac{1}{2} < \sin x < 1$.

Fin du corrigé