

**Exercice 1** ( $\simeq 2,5$  points).

1. Calcul de  $\ell = \frac{\frac{2}{3}}{5} - \frac{2}{\frac{3}{5}}$ .

$$\ell = \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} - 2 \times \frac{5}{3} = \frac{2}{3 \times 5} - \frac{2 \times 5}{3} = \frac{2}{3 \times 5} - \frac{2 \times 5 \times 5}{3 \times 5} = \frac{2 - 50}{3 \times 5} = -\frac{48}{3 \times 5} = -\frac{3 \times 16}{3 \times 5} = -\frac{16}{5}.$$

2. Résolution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation  $\frac{x-1}{5} - \frac{3x-2}{2} = 1$ .

$$\frac{x-1}{5} - \frac{3x-2}{2} = 1 \text{ si et seulement si } 10 \times \left( \frac{x-1}{5} - \frac{3x-2}{2} \right) = 10 \times 1;$$

$$\text{ssi } 2(x-1) - 5(3x-2) = 10;$$

$$\text{ssi } 2x - 2 - 15x + 10 = 10;$$

$$\text{ssi } -13x = 2;$$

$$\text{ssi } x = -\frac{2}{13}.$$

**Exercice 2** ( $\simeq 5$  points). On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \frac{2 \sin x - 4 \cos(3x)}{1 + \sin x}$$

1. Remarquons pour commencer que les expressions  $2 \sin x - 4 \cos(3x)$  et  $1 + \sin x$  sont définies pour tout réel  $x$ . Donc  $f(x)$  est définie ssi le dénominateur  $1 + \sin x$  est différent de zéro.

Or  $1 + \sin x = 0$  ssi  $\sin x = -1$ , ssi  $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Pour cette dernière égalité, dessiner si besoin un cercle trigo et constater que  $\sin x = -1$  lorsque  $x$  est représenté par le point situé tout en bas du cercle.

Conclusion. L'ensemble  $D_f$  de définition de  $f$  est l'ensemble de tous les réels à l'exclusion de ceux de la forme  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ . Autrement dit,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

2. Résolution sur l'intervalle  $[0; \pi]$  de l'inéquation  $f(x) < 2$ .

Compte tenu de la question 1, on peut constater que l'intervalle  $[0; \pi]$  est bien contenu dans  $D_f$ .

$$\text{Maintenant } f(x) < 2 \quad \text{ssi} \quad \frac{2 \sin x - 4 \cos(3x)}{1 + \sin x} < 2.$$

Or, pour tout réel  $x$ , on a  $-1 \leq \sin x \leq 1$ ; donc  $0 \leq 1 + \sin x \leq 2$ . En particulier  $1 + \sin x$  est toujours positif ou nul pour tout réel  $x$ . En fait,  $1 + \sin x$  est même toujours strictement positif sur  $D_f$ , et on peut multiplier l'inégalité précédente par ce terme sans changer le sens de l'inégalité. Ainsi

$$f(x) < 2 \quad \text{ssi} \quad 2 \sin x - 4 \cos(3x) < 2(1 + \sin x)$$

$$\text{ssi} \quad 2 \sin x - 4 \cos(3x) < 2 + 2 \sin x$$

$$\text{ssi} \quad -4 \cos(3x) < 2$$

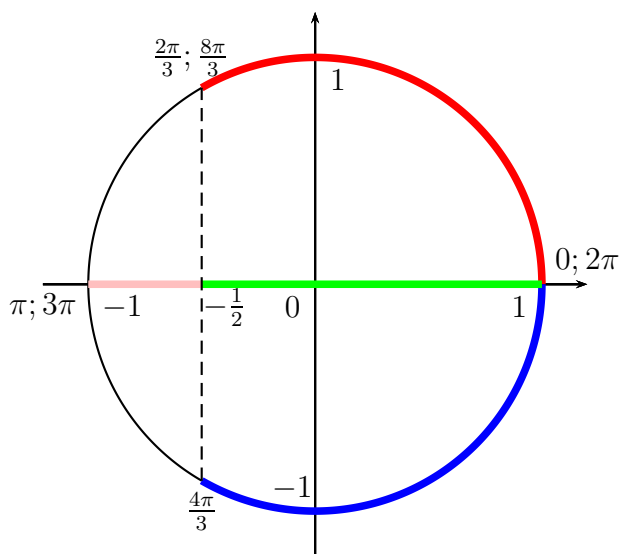
$$\text{ssi} \quad \cos(3x) > -\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \text{ici le sens de l'inégalité a changé car on a divisé des deux côtés par } -4 \text{ qui est négatif.}$$

Comme on veut résoudre l'inéquation sur  $[0; \pi]$ , on a  $x \in [0; \pi]$ , et donc  $3x \in [0; 3\pi]$ .

Considérons alors un réel  $t$  tel que  $t \in [0; 3\pi]$  et cherchons d'abord à résoudre  $\cos(t) > -\frac{1}{2}$ .

Travaillons pour cela avec un cercle trigo. Remarquons d'abord que, pour tout  $t \in [0; 3\pi]$ , on a :

$$\cos(t) = -\frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad t = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad t = \frac{4\pi}{3} \quad \text{ou} \quad t = \frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{8\pi}{3}.$$



Par lecture sur le cercle trigo, en parcourant le cercle de  $t = 0$  vers progressivement  $t = 3\pi$  (cela revient à faire un tour et demi), on constate (voir aussi dessin ci-dessus) que :

$$\cos(t) > -\frac{1}{2} \quad (\text{zone verte}) \quad \text{ssi} \quad 0 \leq t < \frac{2\pi}{3} \quad (\text{zone rouge en commençant le 1er tour})$$

ou

$\frac{4\pi}{3} < t < \frac{8\pi}{3}$  (zone bleue en terminant le 1er tour puis à nouveau zone rouge lors du 2ème tour partiel).

Si on revient à  $x$  (en pensant  $t = 3x$ ), on obtient :

$$\cos(3x) > -\frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad 0 \leq 3x < \frac{2\pi}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{3} < 3x < \frac{8\pi}{3} ,$$

$$\text{ssi} \quad 0 \leq x < \frac{2\pi}{9} \quad \text{ou} \quad \frac{4\pi}{9} < x < \frac{8\pi}{9} .$$

Conclusion. L'ensemble  $S$  des solutions de l'inéquation  $f(x) < 2$  est la réunion de deux intervalles :

$$S = \left[ 0; \frac{2\pi}{9} \left[ \cup \right] \frac{4\pi}{9}; \frac{8\pi}{9} \left[ .$$

**Exercice 3** (  $\simeq 12,5$  points). On considère  $f$  la fonction définie par  $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - 3$ .

Remarque initiale.

J'ai vu dans beaucoup trop de copies une des écritures foireuses suivantes :  $\ln x^2$  ou  $\ln(x)^2$ .

L'écriture  $(\ln x)^2$  est correcte car elle permet de comprendre que, pour un  $x$  donné, on doit d'abord calculer  $\ln x$  puis ensuite calculer le carré du nombre  $\ln x$ .

Il ne faut d'ailleurs pas la confondre avec  $\ln(x^2)$  qui, pour un  $x$  donné, calcule d'abord le carré de  $x$  puis ensuite le logarithme népérien du nombre  $x^2$ .

1. On sait que  $\ln x$  est définie ssi  $x > 0$ . Par conséquent,  $f(x)$  est définie ssi  $x > 0$ . Autrement dit,  $D_f = ]0; +\infty[$ .

2. a) L'expression  $(\ln x)^2$  est de la forme  $(u(x))^\alpha$  avec  $u(x) = \ln x$  et  $\alpha = 2$ . Comme  $u'(x) = \frac{1}{x}$ , la dérivée de  $(\ln x)^2$  est égale à

$$\alpha \times u'(x) \times (u(x))^{\alpha-1} = 2 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^1 = \frac{2}{x} \times \ln x.$$

Remarque. On aurait aussi pu écrire  $(\ln x)^2 = \ln x \times \ln x$  puis le dériver avec la formule de la dérivée de  $u \times v$ .

On en déduit que :

$$f'(x) = \frac{2}{x} \times \ln x - 2 \times \frac{1}{x} - 0 = \frac{2}{x} \times (\ln x - 1).$$

Ainsi  $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$  avec  $g(x) = 2(\ln x - 1)$ .

b) Calculons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ .

On en déduit donc que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x)^2 = \lim_{t \rightarrow -\infty} t^2 = +\infty$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2 \ln x) = +\infty$ .

D'où par somme

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((\ln x)^2 - 2 \ln x - 3) = +\infty.$$

Calculons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

Remarquons pour commencer que  $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x - 3 = \ln x(\ln x - 2) - 3$ .

On sait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - 2) = +\infty$ .

Ainsi, par produit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x(\ln x - 2) = +\infty$ .

Conclusion. Par différence,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x(\ln x - 2) - 3) = +\infty$ .

Remarque. Il est faux d'écrire :

$$\ll \text{En gardant le terme de plus haut degré, on a } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^2 \gg$$

En effet, ici la fonction  $f$  n'est pas un polynôme!

3. On rappelle que  $f'(x) = \frac{2(\ln x - 1)}{x}$ .

Tout d'abord, sur  $]0; +\infty[$ , le dénominateur  $x$  est strictement positif.

Ensuite,  $\ln x - 1 > 0$  si et seulement si  $\ln x > 1$ ,

ssi  $e^{\ln x} > e^1$  (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ),

ssi  $x > e^1$ ,

ssi  $x > e$ .

D'où le tableau de variations de  $f$  :

$x$	0	e	$+\infty$			
2		+	+			
$\ln x - 1$		-	0	+		
$x$	0	+		+		
$f'(x)$		-	0	+		
$f$		$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Remarque :  $f(e) = (\ln e)^2 - 2 \ln e - 3 = 1^2 - 2 \times 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$ .

4. a)  $f'$  est de la forme  $2 \times \frac{U}{V}$  avec  $U(x) = \ln x - 1$  et  $V(x) = x$ . Donc  $U'(x) = \frac{1}{x}$  et  $V'(x) = 1$ . D'où

$$f''(x) = 2 \times \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x - 1) \times 1}{x^2} = 2 \times \frac{1 - \ln x + 1}{x^2},$$

et finalement

$$f''(x) = 2 \times \frac{2 - \ln x}{x^2}.$$

b) La fonction  $f$  est convexe sur un intervalle  $I$  si  $f''(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

On rappelle que  $f''(x) = 2 \times \frac{2 - \ln x}{x^2}$ .

Tout d'abord, sur  $]0; +\infty[$ , le dénominateur  $x^2$  est strictement positif puisque le carré d'un réel est toujours positif ou nul.

Ensuite,  $2 - \ln x > 0$  si et seulement si  $2 > \ln x$

ssi  $\ln x < 2$ ,

ssi  $e^{\ln x} < e^2$  (car la fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ ),

ssi  $x < e^2$ .

D'où le tableau de signes de  $f''$  :

$x$	0	$e^2$	$+\infty$	
2		+	+	
$2 - \ln x$		+	0	-
$x^2$	0	+		+
$f''(x)$		+	0	-
$f$		convexe		concave

Conclusion.  $f$  est convexe sur l'intervalle  $]0; e^2]$ .

5. L'abscisse  $x$  d'un éventuel point d'intersection de la courbe  $C_f$  et de l'axe des abscisses vérifie obligatoirement  $f(x) = 0$ .

Or  $f(x) = 0$  ssi  $(\ln x)^2 - 2 \ln x - 3 = 0$

ssi  $t^2 - 2t - 3 = 0$  avec  $t = \ln x$

Calcul du discriminant du polynôme du 2nd degré  $t^2 - 2t - 3$  :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 4 + 12 = 16 = 4^2.$$

Les racines du polynôme du 2nd degré  $t^2 - 2t - 3$  sont donc  $t_1 = \frac{-(-2) - 4}{2 \times 1} = \frac{2 - 4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

et  $t_2 = \frac{-(-2) + 4}{2 \times 1} = \frac{2 + 4}{2} = \frac{6}{2} = 3$ .

Par conséquent,

$f(x) = 0$  ssi  $t = -1$  ou  $t = 3$ , avec  $t = \ln x$

ssi  $\ln x = -1$  ou  $\ln x = 3$

ssi  $e^{\ln x} = e^{-1}$  ou  $e^{\ln x} = e^3$

ssi  $x = e^{-1}$  ou  $x = e^3$

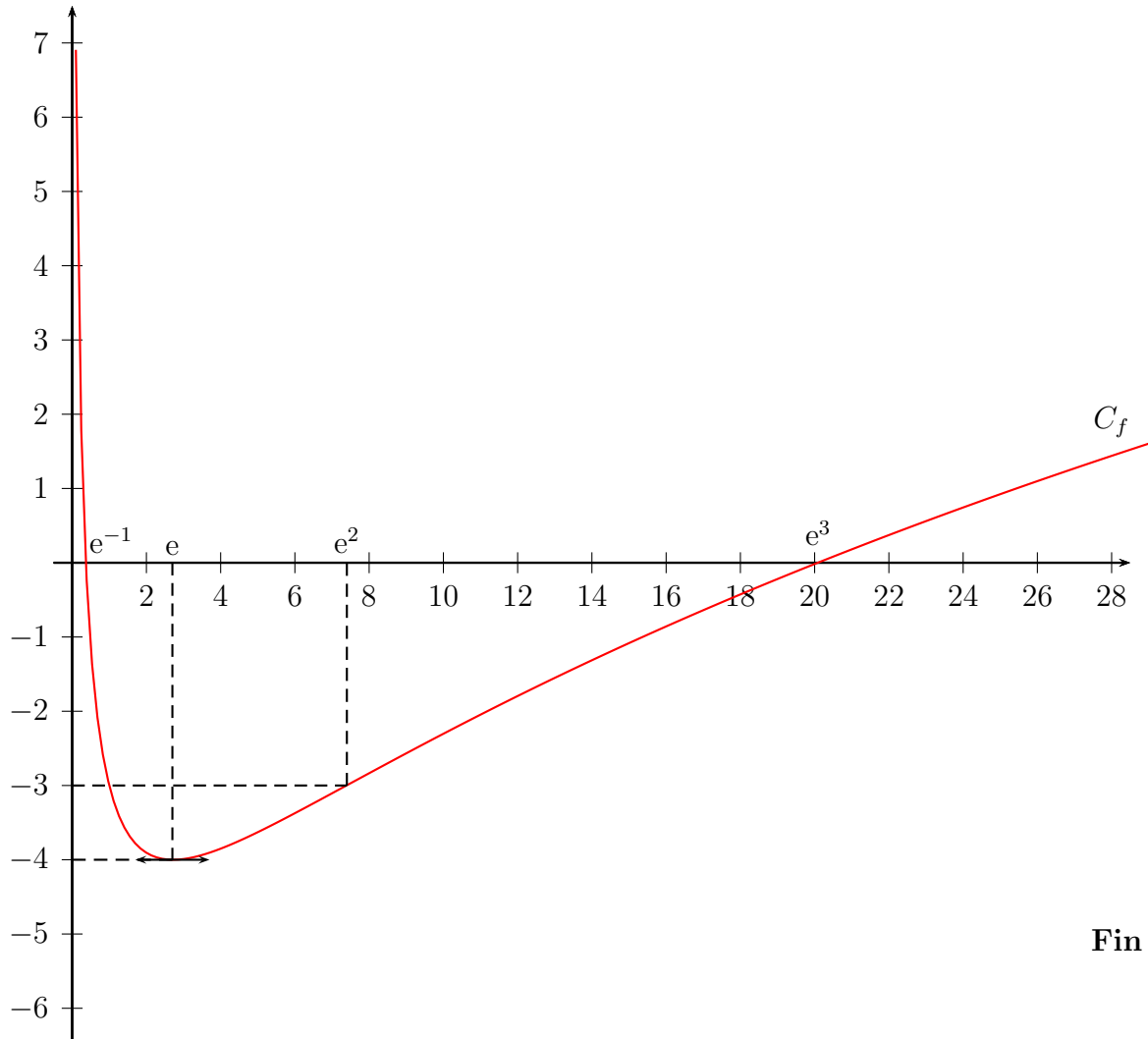
Conclusion. Les points d'intersection de la courbe  $C_f$  et de l'axe des abscisses sont les points de coordonnées  $(e^{-1}; 0)$  et  $(e^3; 0)$ .

## 6. Tracé de la courbe.

On commence par placer les quelques points trouvés aux questions précédentes :

- le point de coordonnées  $(e; -4)$  apparaissant dans le tableau de variations de  $f$  (question 2.c)
- le point de coordonnées  $(e^2; -3)$  apparaissant dans l'étude de convexité de  $f$  (question 3.b); en effet, on a  $f(e^2) = (\ln(e^2))^2 - 2\ln(e^2) - 3 = 2^2 - 2 \times 2 - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$
- les points de coordonnées  $(e^{-1}; 0)$  et  $(e^3; 0)$  (question 4). Pour le tracé, on sait que  $e \simeq 2,7$  donc  $2 < e < 3$  ce qui donne  $\frac{1}{3} < \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$ , c'est-à-dire  $\frac{1}{3} < e^{-1} < \frac{1}{2}$

Ensuite il s'agit de respecter le tableau de variations de  $f$  (question 2.c) et l'étude de convexité de  $f$  (question 3.b).



Fin du corrigé