Exercice 1 ($\simeq 4$ points). Résolution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(E) \ : \ y' - 6y = 21\cos(3x) - 12\sin(3x).$$

• L'équa. diff. (E) est de la forme $y' + a(x) \times y = f(x)$ avec $a(x) = -6$ et $f(x) = 21\cos(3x) - 12\sin(3x)$. Ainsi les solutions de (E) sont obtenues sous la forme $y = y_H + y_P$.

• Solutions y_H de l'équation homogène ?
On a vu que $a(x) = -6$ dont une primitive est donnée par $A(x) = -6x$.
D'où $y_H = \lambda\, \mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\, \mathrm{e}^{6x}$ avec λ une constante réelle.

• Solution particulière y_P de (E) ?
Ici $a(x) = -6 = a$ est une constante, ce qui permet d'utiliser le tableau donné dans l'énoncé.
Comme $f(x) = 21\cos(3x) - 12\sin(3x) = \lambda_1\cos(\omega x) + \lambda_2\sin(\omega x)$ avec $\lambda_1 = 21$, $\lambda_2 = -12$ et $\omega = 3$, on utilise la dernière ligne du tableau.

On va donc chercher y_P sous la forme $y_P = \alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)$ avec α et β des constantes réelles à déterminer.
En particulier on a $y_P' = -3\alpha\sin(3x) + 3\beta\cos(3x)$.
On veut que $y_P' - 6y_P = 21\cos(3x) - 12\sin(3x)$ pour tout réel x, c'est-à-dire

$$-3\alpha\sin(3x) + 3\beta\cos(3x) - 6\big(\alpha\cos(3x) + \beta\sin(3x)\big) = 21\cos(3x) - 12\sin(3x).$$

Cela donne $(3\beta - 6\alpha)\cos(3x) + (-3\alpha - 6\beta)\sin(3x) = 21\cos(3x) - 12\sin(3x)$.
On en déduit que

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3\beta - 6\alpha & = & 21 & \leftarrow \text{ termes en } \cos(3x) \\ -3\alpha - 6\beta & = & -12 & \leftarrow \text{ termes en } \sin(3x) \end{array}\right.$$

En divisant ces deux équations par 3 et -3 respectivement, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \beta - 2\alpha & = & 7 \\ \alpha + 2\beta & = & 4 \end{array}\right.$$

La seconde égalité permet d'écrire $\alpha = 4 - 2\beta$, que l'on peut reporter dans la première égalité :

$$\beta - 2 \times (4 - 2\beta) = 7.$$

On obtient alors $\beta - 8 + 4\beta = 7$, ce qui donne $5\beta = 15$ et finalement $\beta = \dfrac{15}{5} = 3$.
Ainsi $\alpha = 4 - 2\beta = 4 - 2 \times 3 = -2$.
D'où $y_P = -2\cos(3x) + 3\sin(3x)$.

• Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda\, \mathrm{e}^{6x} - 2\cos(3x) + 3\sin(3x)$$

avec λ une constante réelle.

Exercice 2 ($\simeq 4,5$ points). Résolution sur $]0;+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$(E)\ :\ x^2y' - xy = \left(2x^2-3\right)^2.$$

- Après avoir divisé par x^2 (possible car $x \neq 0$ sur $]0;+\infty[$), l'équa. diff. (E) peut aussi s'écrire :

$$y' - \frac{1}{x} \times y = \frac{\left(2x^2-3\right)^2}{x^2}$$

Cette équa. diff. est donc de la forme $y' + a(x) \times y = f(x)$ avec $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ et $f(x) = \dfrac{\left(2x^2-3\right)^2}{x^2}$.
Ainsi les solutions de (E) sont obtenues sous la forme $y = y_H + y_P$.

- Solutions y_H de l'équation homogène ?
On a vu que $a(x) = -\dfrac{1}{x}$ qui est de la forme $-\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = x$ et donc $u'(x) = 1$.
Une primitive A sur $]0;+\infty[$ de la fonction a est donc définie par $A(x) = -\ln|u(x)| = -\ln|x| = -\ln(x)$ puisque $x > 0$ pour tout réel $x \in]0;+\infty[$.
Par conséquent

$$y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{+\ln(x)} = \lambda \times x$$

avec λ une constante réelle quelconque.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante.
On va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times x$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer.
En dérivant y_P comme un produit, on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times x + \lambda(x) \times 1 = \lambda'(x) \times x + \lambda(x)$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir pour tout $x > 0$

$$x^2 y_P' - x y_P = \left(2x^2-3\right)^2$$

c'est-à-dire

$$x^2\left(\lambda'(x) \times x + \lambda(x)\right) - x \times \left(\lambda(x) \times x\right) = \left(2x^2-3\right)^2$$

Autrement dit,

$$x^3\lambda'(x) + x^2\lambda(x) - x^2\lambda(x) = \left(2x^2-3\right)^2$$

ce qui donne

$$x^3\lambda'(x) = \left(2x^2-3\right)^2$$

Ainsi

$$\lambda'(x) = \frac{\left(2x^2-3\right)^2}{x^3}$$

Attention aux identités remarquables ! J'ai vu de nombreuses erreurs dans les copies pour déterminer $\left(2x^2-3\right)^2$. On utilise évidemment $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 2x^2$ et $b = 3$. On a donc notamment $a^2 = (2x^2)^2 = 4x^4$...

On en déduit donc que

$$\lambda'(x) = \frac{4x^4 - 12x^2 + 9}{x^3} = \frac{4x^4}{x^3} - \frac{12x^2}{x^3} + \frac{9}{x^3} = 4x - \frac{12}{x} + \frac{9}{x^3} = 4x - 12 \times \frac{1}{x} + 9 \times x^{-3}$$

Or x^{-3} est de la forme $u'(x) \times (u(x))^\alpha$ avec $\alpha = -3$ et $u(x) = x$; en effet, $u'(x) = 1$.

Donc une primitive de x^{-3} est $\dfrac{x^{-3+1}}{-3+1} = \dfrac{x^{-2}}{-2} = \dfrac{-1}{2x^2}$.
On peut donc prendre

$$\lambda(x) = 2x^2 - 12\ln x - \frac{9}{2x^2}$$

D'où

$$y_P = \lambda(x) \times x = 2x^3 - 12x\ln x - \frac{9}{2x}.$$

- Conclusion : les solutions de (E) sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda \times x + 2x^3 - 12x\ln x - \frac{9}{2x}$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 3 ($\simeq 4,5$ points). Résolution sur $\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ \cos(x) \times y' + 2\sin(x) \times y = \sin(2x) \times \cos^4(x).$$

- Après avoir divisé par $\cos x$ (possible car $\cos x \neq 0$ pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$), cette équation peut aussi s'écrire :

$$y' + 2 \times \frac{\sin x}{\cos x} \times y = \sin(2x) \times \cos^3(x)$$

Cette dernière équation est de la forme $y' + a(x)y = f(x)$ avec $a(x) = 2 \times \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $f(x) = \sin(2x) \times \cos^3(x)$.

Ainsi les solutions de (E) sont obtenues sous la forme $y = y_H + y_P$.

- Solutions y_H de l'équation homogène ?

Tout d'abord, $a(x) = 2 \times \dfrac{\sin x}{\cos x} = -2 \times \dfrac{-\sin x}{\cos x}$ est de la forme $(-2) \times \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ en prenant $u(x) = \cos x$; en effet, on a $u'(x) = -\sin x$.

Une primitive A sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ de la fonction a est donc définie par

$$A(x) = (-2) \times \ln|u(x)| = (-2) \times \ln|\cos x| = -2\ln(\cos x)$$

puisque $\cos x > 0$ pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

Par conséquent

$$y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-A(x)} = \lambda\,\mathrm{e}^{2\ln(\cos x)} = \lambda \times \cos^2 x$$

avec λ une constante réelle quelconque.

- Solution particulière y_P de (E) ? On utilise la méthode de variation de la constante et on va chercher y_P sous la forme $y_P = \lambda(x) \times \cos^2 x$ avec $x \mapsto \lambda(x)$ une fonction à déterminer.

Avant d'aller plus loin, déterminons la dérivée de y_P en utilisant la formule de dérivation d'un produit :

$$y_P' = \lambda'(x) \times \cos^2 x + \lambda(x) \times \left(\cos^2 x\right)'$$

Or en utilisant la formule $\left(u^\alpha\right)' = \alpha \cdot u' \cdot u^{\alpha-1}$ avec $\alpha = 2$, $u(x) = \cos x$ et donc $u'(x) = -\sin x$, on a :

$$\left(\cos^2 x\right)' = \left((\cos x)^2\right)' = 2 \times (-\sin x) \times (\cos x)^1 = -2\sin x \times \cos x$$

Ainsi on obtient :

$$y_P' = \lambda'(x) \times \cos^2 x - 2\lambda(x) \times \sin x \times \cos x$$

Traduisons maintenant le fait que y_P doit vérifier l'équation (E). On doit donc avoir pour tout réel x :

$$\cos x \times y_P' + 2\sin x \times y_P = \sin(2x) \times \cos^4(x)$$

c'est-à-dire

$$\cos x \times \left[\lambda'(x) \times \cos^2 x - 2\lambda(x) \times \sin x \times \cos x\right] + 2\sin x \times \lambda(x) \times \cos^2 x = \sin(2x) \times \cos^4(x)$$

c'est-à-dire encore

$$\cos^3 x \times \lambda'(x) - 2\sin x \times \cos^2 x \times \lambda(x) + 2\sin x \times \cos^2 x \times \lambda(x) = \sin(2x) \times \cos^4(x).$$

Autrement dit,

$$\cos^3 x \times \lambda'(x) = \sin(2x) \times \cos^4(x)$$

ce qui donne

$$\lambda'(x) = \sin(2x) \times \cos x$$

Or on sait que $\sin(2t) = 2\sin t \cos t$ pour tout réel t. On obtient donc

$$\lambda'(x) = \sin(2x) \times \cos x = 2\sin x \cos x \times \cos x = 2\sin x \cos^2 x$$

Remarque. Pour transformer $\lambda'(x)$, on aurait aussi pu utiliser la formule de trigo donnant $\sin(a) \times \cos(b)$...

L'expression $2\sin x \cos^2 x = (-2) \times (-\sin x) \times (\cos x)^2$ est de la forme $(-2) \times u'(x) \times (u(x))^2$ en prenant $u(x) = \cos x$ (et donc $u'(x) = -\sin x$). Une primitive de ce terme est donc $(-2) \times \dfrac{(u(x))^3}{3} = -\dfrac{2}{3}\cos^3 x$.

On peut donc choisir :

$$\lambda(x) = -\frac{2}{3}\cos^3 x$$

puis en déduire

$$y_P = \lambda(x) \times \cos^2 x = -\frac{2}{3}\cos^5 x.$$

- Conclusion : les solutions de (E) sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent

$$y = y_H + y_P = \lambda \cos^2 x - \frac{2}{3}\cos^5 x$$

avec λ une constante réelle quelconque.

Exercice 4 ($\simeq 7$ points). On considère l'équation différentielle

$$(E):\ 2y'' + 5y' - 3y = (5 - 12x)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

1. Résolution de l'équation homogène $(H):\ 2y'' + 5y' - 3y = 0$.
   L'équation caractéristique associée à (H) est $2r^2 + 5r - 3 = 0$.
   Calcul du discriminant : $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$.
   Les solutions de l'équation caractéristique sont

$$r_1 = \frac{-5-7}{2\times 2} = \frac{-12}{4} = -3 \qquad \text{et} \qquad r_2 = \frac{-5+7}{2\times 2} = \frac{2}{2\times 2} = \frac{1}{2}$$

   Donc $y_H = \lambda\,\mathrm{e}^{-3x} + \mu\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$, où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

2. Cherchons une solution particulière de l'équation (E) sous la forme $y_P = (\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{-x}$ où α et β sont des constantes réelles à déterminer.
   Alors, en dérivant y_P comme un produit, on obtient

$$y_P' = \alpha\,\mathrm{e}^{-x} + (\alpha x + \beta)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = (\alpha - \alpha x - \beta)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

   Puis, en dérivant y_P' à nouveau comme un produit, on obtient

$$y_P'' = -\alpha\,\mathrm{e}^{-x} + (\alpha - \alpha x - \beta)\times(-\mathrm{e}^{-x}) = (\alpha x - 2\alpha + \beta)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

$$\begin{aligned}
y_P \text{ vérifie } (E) &\iff 2y_P'' + 5y_P' - 3y_P = (5-12x)\,\mathrm{e}^{-x} \quad \text{pour tout réel } x\\
&\iff 2(\alpha x - 2\alpha + \beta)\,\mathrm{e}^{-x} + 5(\alpha - \alpha x - \beta)\,\mathrm{e}^{-x} - 3(\alpha x + \beta)\,\mathrm{e}^{-x} = (5-12x)\,\mathrm{e}^{-x}\\
&\iff 2(\alpha x - 2\alpha + \beta) + 5(\alpha - \alpha x - \beta) - 3(\alpha x + \beta) = 5 - 12x\\
&\iff 2\alpha x - 4\alpha + 2\beta + 5\alpha - 5\alpha x - 5\beta - 3\alpha x - 3\beta = 5 - 12x\\
&\iff -6\alpha x + \alpha - 6\beta = 5 - 12x
\end{aligned}$$

   Par identification on obtient

$$\begin{cases} -6\alpha = -12 & \leftarrow \text{ termes en } x\\ \alpha - 6\beta = 5 & \leftarrow \text{ termes constants}\end{cases}$$

   La première égalité donne $\alpha = \dfrac{-12}{-6} = 2$.

   Puis la seconde permet d'obtenir $2 - 6\beta = 5$, c'est-à-dire $-6\beta = 3$. Ainsi $\beta = \dfrac{3}{-6} = \dfrac{-1}{2}$.

   D'où $y_P = \left(2x - \dfrac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$.

3. Déterminons l'unique solution de l'équation différentielle $2y'' + 5y' - 3y = (5-12x)\,\mathrm{e}^{-x}$ vérifiant $y(0) = \dfrac{1}{2}$ et $y'(0) = \dfrac{1}{2}$.

   On déduit des questions précédentes que les solutions de (E) sont données par

$$y = y_H + y_P = \lambda\,\mathrm{e}^{-3x} + \mu\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}$$

   où λ et μ sont des constantes réelles quelconques.

Alors, en utilisant le fait que $\mathrm{e}^0 = 1$, on obtient

$$y(0) = \frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \lambda + \mu - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\lambda + \mu = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. D'où $\lambda = 1 - \mu$.

D'autre part, en dérivant la fonction y, on obtient :

$$y' = -3\lambda\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{1}{2}\mu\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + 2\,\mathrm{e}^{-x} - \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Par conséquent, en utilisant à nouveau le fait que $\mathrm{e}^0 = 1$, on a :

$$y'(0) = \frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad -3\lambda + \frac{1}{2}\mu + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

En remplaçant λ par $1 - \mu$ dans l'équation $-3\lambda + \frac{1}{2}\mu + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, on obtient

$$-3(1 - \mu) + \frac{1}{2}\mu + 2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire

$$-3 + 3\mu + \frac{1}{2}\mu = -2$$

c'est-à-dire encore

$$\frac{7}{2}\mu = 1.$$

Par conséquent $\mu = \frac{2}{7}$ et donc $\lambda = 1 - \mu = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$.

Finalement l'unique solution de l'équation $2y'' + 5y' - 3y = (5 - 12x)\,\mathrm{e}^{-x}$ vérifiant $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = \frac{1}{2}$ est la fonction définie par :

$$y = \frac{5}{7}\,\mathrm{e}^{-3x} + \frac{2}{7}\,\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + \left(2x - \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Fin du corrigé