

Exercice 1 ($\simeq 7$ points). $f(x, y) = (x^2 + y^2 - 2x + y - 4) e^{-y}$

1. Dérivées partielles premières.

Comme e^{-y} est une constante par rapport à la variable x , on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (2x - 2) e^{-y} = 2(x - 1) e^{-y}.$$

En utilisant la formule de dérivation d'un produit, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2y + 1) \times e^{-y} + (x^2 + y^2 - 2x + y - 4) \times (-e^{-y})$$

ce qui donne en factorisant

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (2y + 1 - x^2 - y^2 + 2x - y + 4) e^{-y} = (-x^2 - y^2 + 2x + y + 5) e^{-y}.$$

2. Pour déterminer les points critiques on doit résoudre le système :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(x - 1) e^{-y} = 0 \\ (-x^2 - y^2 + 2x + y + 5) e^{-y} = 0 \end{cases}$$

Comme $e^{-y} \neq 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ (un exponentielle n'est jamais nul), on obtient :

$$(S) \iff \begin{cases} x - 1 = 0 \\ -x^2 - y^2 + 2x + y + 5 = 0 \end{cases}$$

La première équation nous donne $x = 1$ que l'on peut remplacer dans la seconde équation. Ainsi

$$-1^2 - y^2 + 2 \times 1 + y + 5 = 0$$

ce qui donne

$$-y^2 + y + 6 = 0$$

Pour résoudre cette équation, on calcule son discriminant $\Delta = 1 + 24 = 25 = 5^2$ puis on en déduit les deux solutions $y_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-1)} = \frac{4}{-2} = -2$ et $y_2 = \frac{-1-5}{-2} = 3$.

Par conséquent, f admet deux points critiques : les points $(1; -2)$ et $(1; 3)$.

3. Dérivées partielles secondes. En utilisant les mêmes techniques qu'à la question 1,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2 e^{-y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -2(x - 1) e^{-y},$$

et

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (-2y + 1) \times e^{-y} + (-x^2 - y^2 + 2x + y + 5) \times (-e^{-y})$$

ce qui donne en factorisant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = (-2y + 1 + x^2 + y^2 - 2x - y - 5) e^{-y} = (x^2 + y^2 - 2x - 3y - 4) e^{-y}.$$

4. • La fonction f admet-elle un extremum local en $(1, -2)$? On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -2) = 2e^2; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, -2) = 0;$$

$$\text{et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, -2) = (1 + 4 - 2 + 6 - 4)e^2 = 5e^2.$$

Attention ! Il est faux d'écrire que $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 2e^{-y}$. En effet, r est la constante égale à l'expression $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ évaluée au point critique $(1, -2)$; autrement dit, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -2) = 2e^2$.

Ainsi $rt - s^2 = 10e^4 - 0 = 10e^4 > 0$ car $e^a > 0$ pour tout réel a .

Comme $r = 2e^2 > 0$, la fonction f admet un minimum local en $(1, -2)$.

• La fonction f admet-elle un extremum local en $(1, 3)$? On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 3) = 2e^{-3}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1, 3) = 0;$$

$$\text{et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1, 3) = (1 + 9 - 2 - 9 - 4)e^{-3} = -5e^{-3}.$$

Ainsi $rt - s^2 = -10e^{-6} - 0 = -10e^{-6} < 0$ (puisque $e^a > 0$ pour tout réel a).

La fonction f n'admet donc pas d'extremum local en $(1, 3)$.

Exercice 2 ($\simeq 7$ points).

1. $f(x, y) = \sqrt{(x + y)(x - y + 2)}$.

Remarquons pour commencer que l'expression $\sqrt{t}$ est définie ssi $t \geq 0$.

Par conséquent, $f(x, y)$ est définie ssi $(x + y)(x - y + 2) \geq 0$.

Or, si a et b sont deux réels, on sait que $a \times b \geq 0$ ssi a et b sont de même signe. Autrement dit,

$$a \times b \geq 0 \text{ ssi } \begin{cases} (a \geq 0 \text{ et } b \geq 0) \\ \text{ou} \\ (a \leq 0 \text{ et } b \leq 0) \end{cases}$$

On en déduit donc que

$$f(x, y) \text{ est définie ssi } \begin{cases} (x + y \geq 0 \text{ et } x - y + 2 \geq 0) \\ \text{ou} \\ (x + y \leq 0 \text{ et } x - y + 2 \leq 0) \end{cases}$$

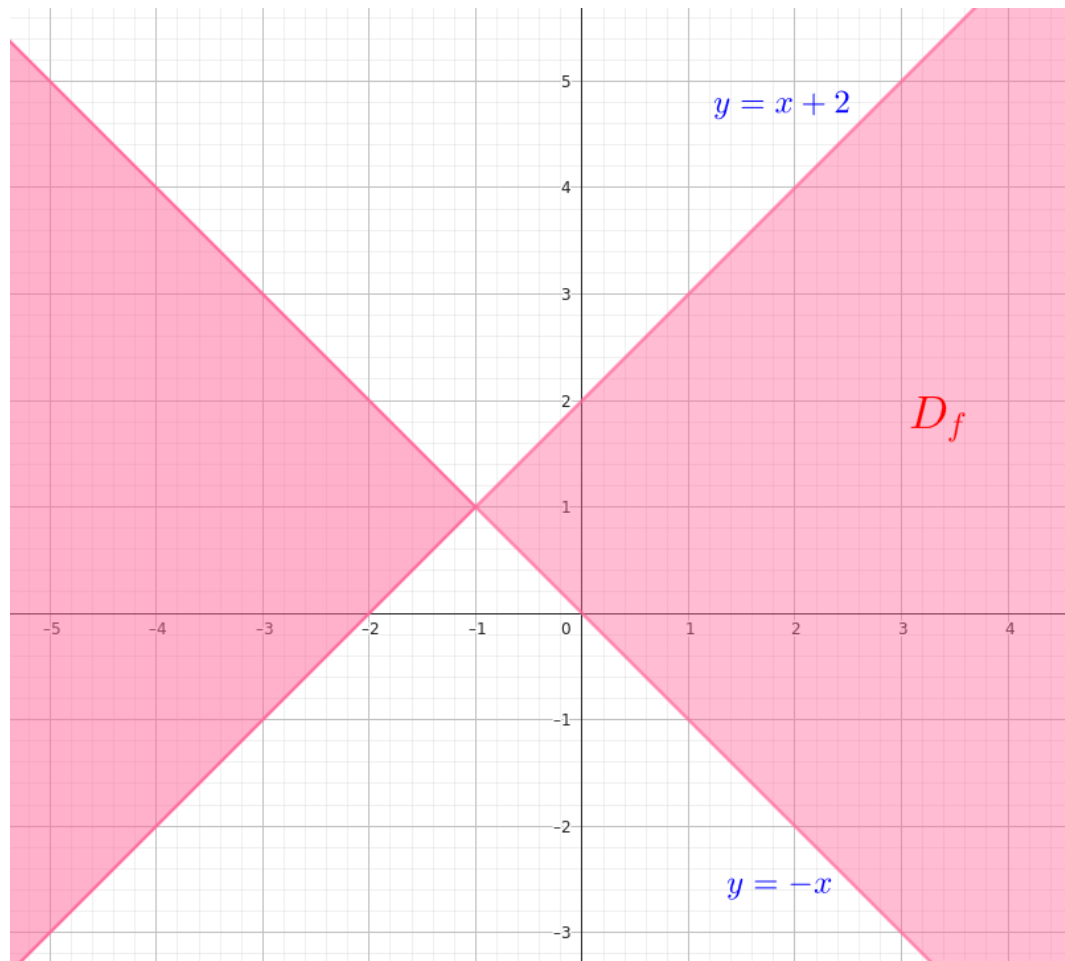
$$\text{ssi } \begin{cases} (y \geq -x \text{ et } y \leq x + 2) \\ \text{ou} \\ (y \leq -x \text{ et } y \geq x + 2) \end{cases}$$

Conclusion. Le domaine de définition D_f de la fonction f est représenté par la réunion de deux zones. La première zone est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) qui sont à la fois situés au-dessus de la droite d'équation $y = -x$ (droite incluse) et sous la droite d'équation $y = x + 2$

(droite incluse). Et la seconde zone est l'ensemble des points de coordonnées (x, y) qui sont à la fois situés sous la droite d'équation $y = -x$ (droite incluse) et au-dessus de la droite d'équation $y = x + 2$ (droite incluse).

Attention pour la représentation graphique. Les axes ne sont pas gradués dans beaucoup trop de copies. Comment puis-je valider la représentation de la droite d'équation $y = x + 2$ dans ce cas ? Par exemple, sans graduations, je ne peux pas savoir si l'ordonnée à l'origine est bien 2 sur le dessin !

D_f est représenté en rouge ci-dessous :



$$2. \quad g(x, y) = \frac{2 \ln(x^2 + y^2 + 6x)}{\ln(2y + 3)}.$$

a) On sait que :

- $\ln(t)$ est définie si et seulement si $t > 0$;
- $\frac{X}{Y}$ est définie si et seulement si $Y \neq 0$.

Donc $g(x, y) = \frac{2 \ln(x^2 + y^2 + 6x)}{\ln(2y + 3)}$ est définie

si et seulement si $\ln(x^2 + y^2 + 6x)$ est définie et $\ln(2y + 3)$ est définie et $\ln(2y + 3) \neq 0$,

ssi $x^2 + y^2 + 6x > 0$ et $2y + 3 > 0$ et $\ln(2y + 3) \neq 0$,

ssi $(x + 3)^2 - 3^2 + y^2 > 0$ et $2y > -3$ et $e^{\ln(2y+3)} \neq e^0$,

ssi $(x + 3)^2 + y^2 > 3^2$ et $y > -\frac{3}{2}$ et $2y + 3 \neq 1$,

ssi $(x - (-3))^2 + (y - 0)^2 > 3^2$ et $y > -\frac{3}{2}$ et $y \neq -1$.

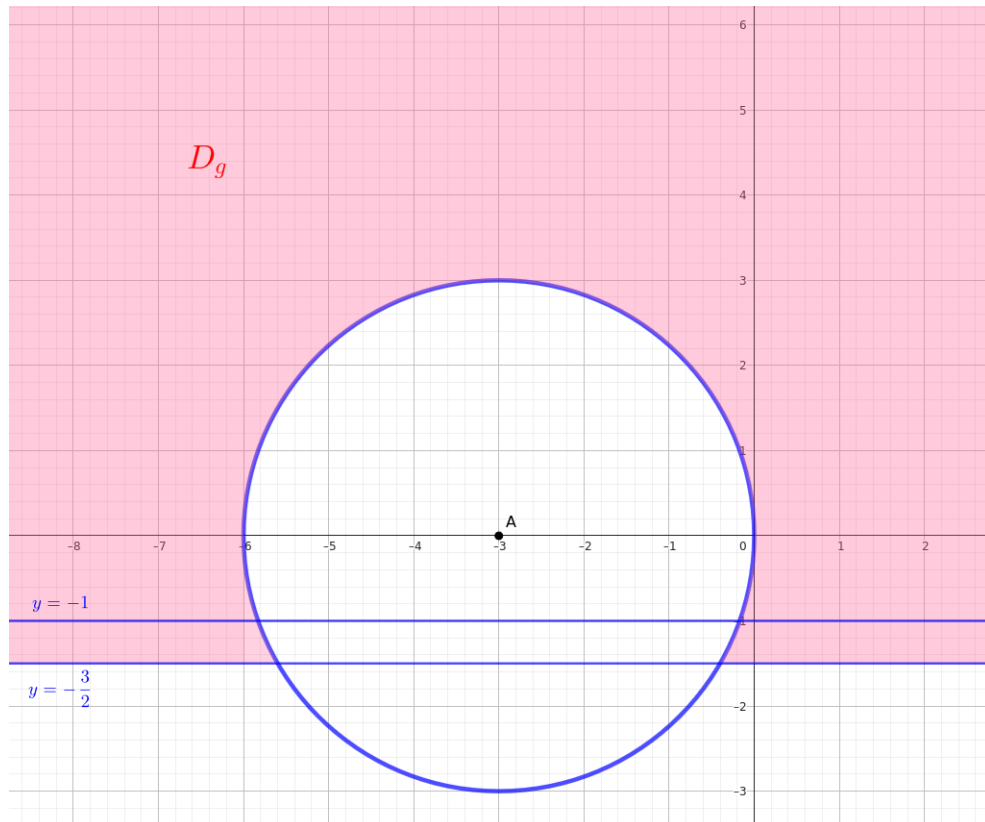
Or $(x - (-3))^2 + (y - 0)^2 = 3^2$ est l'équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre $A(-3; 0)$ et de rayon 3 ;

$y = -\frac{3}{2}$ est l'équation d'une droite horizontale que nous noterons $\mathcal{D}$;

et $y = -1$ est l'équation d'une droite horizontale que nous noterons $\mathcal{D}'$.

Par conséquent, le domaine D_g correspond aux points situés à l'extérieur du cercle $\mathcal{C}$ et au-dessus de la droite $\mathcal{D}$; mais aucun des points du cercle $\mathcal{C}$, ni ceux des droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont dans D_g .

Le domaine D_g est donc la zone rouge ci-dessous :



b) La ligne de niveau 2 de la fonction g a pour équation $g(x, y) = 2$ pour tout $(x, y) \in D_g$.

$$\text{Or } g(x, y) = 2 \text{ ssi } \frac{2 \ln(x^2 + y^2 + 6x)}{\ln(2y + 3)} = 2.$$

$$\text{ssi } 2 \ln(x^2 + y^2 + 6x) = 2 \ln(2y + 3)$$

$$\text{ssi } \ln(x^2 + y^2 + 6x) = \ln(2y + 3)$$

$$\text{ssi } \exp(\ln(x^2 + y^2 + 6x)) = \exp(\ln(2y + 3))$$

$$\text{ssi } x^2 + y^2 + 6x = 2y + 3$$

$$\text{ssi } x^2 + 6x + y^2 - 2y = 3$$

$$\text{ssi } (x + 3)^2 - 3^2 + (y - 1)^2 - 1^2 = 3$$

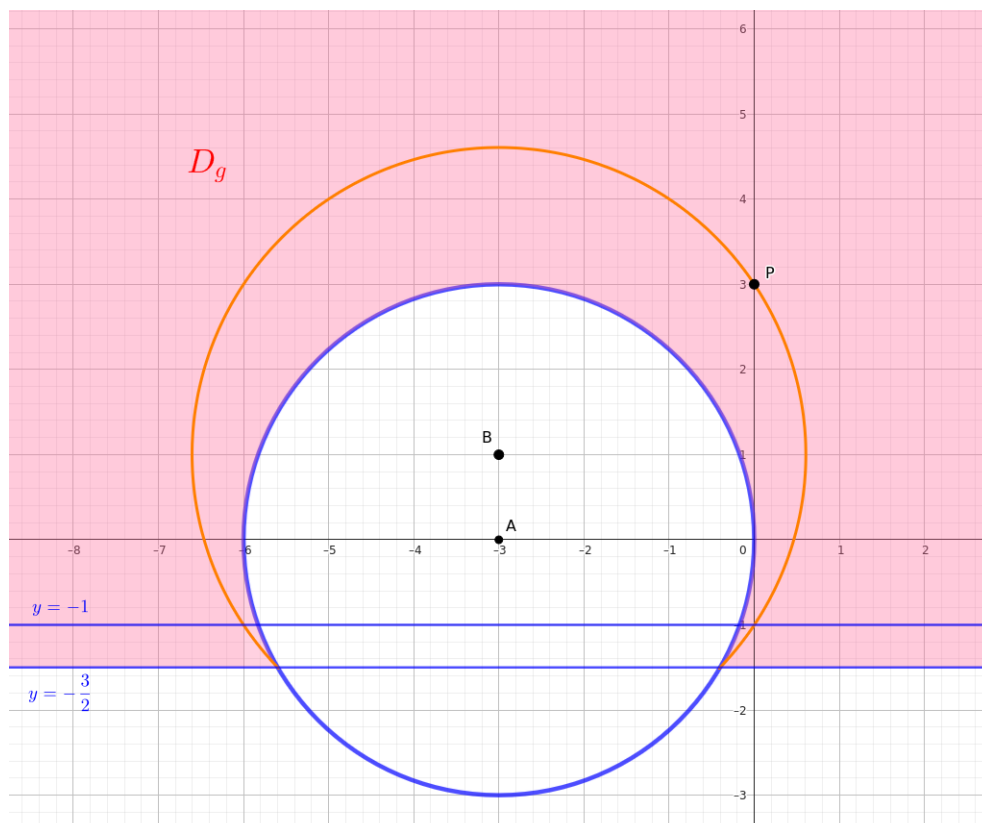
$$\text{ssi } (x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$$

$$\text{ssi } (x - (-3))^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{13})^2.$$

Conclusion. La ligne de niveau 2 de g est constituée de tous les points de D_g qui sont situés sur le cercle de centre $B(-3; 1)$ et de rayon $R = \sqrt{13}$. Elle est représentée en orange sur le dessin ci-dessous.

Attention. Il ne faut pas dessiner tout le cercle ; la ligne de niveau 2 n'est qu'une partie du cercle. Il s'agit du bout de cercle situé dans la zone rouge représentant D_g . En particulier, les points d'intersection du cercle et de la droite d'équation $y = -1$ ne font pas partie de la ligne de niveau 2.

Remarque. Pour tracer le rayon $R = \sqrt{13}$, on pouvait noter que $9 < 13 < 16$ et donc $3 < \sqrt{13} < 4$, ce qui permettait de tracer approximativement le cercle. Ou sinon on pouvait être plus précis en remarquant que le point $P(0; 3)$ appartient au cercle car ses coordonnées vérifient l'équation du cercle : en effet, $(0 + 3)^2 + (3 - 1)^2 = 13$.



Exercice 3 ($\simeq 6$ points). $f(x, y) = \sin(2x) - x + y^3 + \frac{5}{2}y^2 - 2y + 3$

1. Dérivées partielles premières.

En utilisant la formule $(\sin(u))' = u' \cos(u)$, on obtient ici avec $u(x) = 2x$ et donc $u'(x) = 2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2 \cos(2x) - 1 + 0 + 0 - 0 + 0 = 2 \cos(2x) - 1.$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 - 0 + 3y^2 + 5y - 2 + 0 = 3y^2 + 5y - 2.$$

2. Pour déterminer les points critiques on doit résoudre le système :

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \cos(2x) - 1 = 0 \\ 3y^2 + 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$(S) \iff \begin{cases} \cos(2x) = \frac{1}{2} \\ 3y^2 + 5y - 2 = 0 \end{cases}$$

Résolvons pour commencer la première équation. Par lecture sur le cercle trigo (faire un dessin si nécessaire), on a pour tout réel X :

$$\cos X = \frac{1}{2} \text{ ssi } X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } X = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

En appliquant ceci à $X = 2x$, on obtient :

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \text{ ssi } 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z})$$

c'est-à-dire

$$\cos(2x) = \frac{1}{2} \text{ ssi } x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z}).$$

Passons maintenant à la résolution de la seconde équation $3y^2 + 5y - 2 = 0$. On calcule son discriminant $\Delta = 25 + 24 = 49 = 7^2$ puis on en déduit les deux solutions $y_1 = \frac{-5+7}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$ et $y_2 = \frac{-5-7}{6} = -2$.

Par conséquent, f admet une infinité de points critiques qui sont de 4 types différents :

- les points de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; -2\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- les points de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; -2\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- les points de coordonnées $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$;
- les points de coordonnées $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

3. Dérivées partielles secondes. En utilisant notamment la formule $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$, on obtient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -4 \sin(2x); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0; \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 6y + 5.$$

4. • La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; -2\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$? On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; -2 \right) = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; -2 \right) = 0;$$

$$\text{et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; -2 \right) = 6 \times (-2) + 5 = -7.$$

Ainsi $rt - s^2 = 14\sqrt{3} > 0$.

Comme $r = -2\sqrt{3} < 0$, la fonction f admet un maximum local en $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; -2\right)$.

- La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; -2\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$? On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; -2 \right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; -2 \right) = 0;$$

$$\text{et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; -2 \right) = 6 \times (-2) + 5 = -7.$$

Ainsi $rt - s^2 = -14\sqrt{3} < 0$.

La fonction f n'admet pas d'extremum local en $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; -2\right)$.

- La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$? On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3} \right) = -4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3} \right) = 0;$$

$$\text{et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3} \right) = 6 \times \frac{1}{3} + 5 = 7.$$

Ainsi $rt - s^2 = -14\sqrt{3} < 0$.

La fonction f n'admet pas d'extremum local en $\left(\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3}\right)$.

- La fonction f admet-elle un extremum local en $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3}\right)$ avec $k \in \mathbb{Z}$? On a :

$$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3} \right) = 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}; \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3} \right) = 0;$$

$$\text{et } t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3} \right) = 6 \times \frac{1}{3} + 5 = 7.$$

Ainsi $rt - s^2 = 14\sqrt{3} > 0$.

Comme $r = 2\sqrt{3} > 0$, la fonction f admet un minimum local en $\left(-\frac{\pi}{6} + k\pi; \frac{1}{3}\right)$.