

Exercice 1. On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + t \\ y(t) &= t^3 - 3t \end{cases}$$

1. a) Calcul des dérivées sur $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x'(t) &= 2t + 1 \\ y'(t) &= 3t^2 - 3 = 3(t^2 - 1) \end{cases}$$

Remarque. On peut factoriser davantage $t^2 - 1$ en utilisant une identité remarquable :

$$t^2 - 1 = t^2 - 1^2 = (t - 1)(t + 1),$$

ce qui pourrait être particulièrement utile à la question 1.c.

b) On sait que la limite en $\pm\infty$ d'un polynôme est égale à la limite de son terme de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^2) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (t^3) = +\infty.$$

$$\text{De même,} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^2) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (t^3) = -\infty.$$

Attention ! On ne se contente pas de balancer un résultat de limite en faisant comme si c'était évident : il faut absolument détailler son raisonnement.

Pour ces calculs de limites, on aurait aussi pu factoriser $x(t) = t^2 + t = t(t + 1)$ et $y(t) = t^3 - 3t = t(t^2 - 3)$, puis faire des calculs directs de produits de limites.

c) • Étude du signe de $x'(t) = 2t + 1$ sur $\mathbb{R}$.

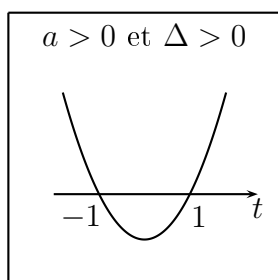
$$x'(t) > 0 \text{ si et seulement si } 2t + 1 > 0, \text{ ssi } 2t > -1, \text{ ssi } t > -\frac{1}{2}.$$

• Étude du signe de $y'(t) = 3(t^2 - 1)$ sur $\mathbb{R}$. $y'(t)$ est du signe du trinôme du second degré $t^2 - 1$.

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = 0^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 > 0.$$

Les solutions de l'équation $t^2 - 1 = 0$ sont -1 et 1 .

Comme $a = 1 > 0$ et $\Delta = 4 > 0$, la parabole d'équation $y = t^2 - 1$ est représentée sous cette forme :



Par lecture graphique, on peut affirmer que $y'(t) > 0$ si et seulement si $t^2 - 1 > 0$, ssi $t < -1$ ou $t > 1$.

- On en déduit le tableau de variations :

t	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$				
$x'(t)$		$-$	0	$+$					
x	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{11}{8}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$			

Attention ! On ne se contente pas de résoudre $x'(t) = 0$ pour justifier le signe de $x'(t)$. Idem pour $y'(t)$. Beaucoup trop d'étudiants perdent des points sur cette (non-)justification parce qu'ils n'ont toujours pas compris que le raisonnement était tout aussi important que le résultat et parce qu'ils croient naïvement que balancer le résultat va rapporter des points...

Détails des calculs pour le tableau de variations :

$$x(-1) = 1 - 1 = 0;$$

$$y(-1) = -1 + 3 = 2;$$

$$x\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4};$$

$$y\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{3}{2} = \frac{-1 + 12}{8} = \frac{11}{8};$$

$$x(1) = 1 + 1 = 2;$$

$$y(1) = 1 - 3 = -2.$$

2. ► On a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(-1) = x'(-1)\vec{i} + y'(-1)\vec{j} = -1\vec{i} + 0\vec{j} = -\vec{i} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(-1)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{i}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

Attention (1). Il est essentiel de préciser d'abord que ce vecteur est $\neq \vec{0}$ pour être sûr qu'il dirige la tangente.

Attention (2). Il ne faut surtout pas écrire que $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(-1)$ est égal à $\vec{i}$. En effet, les vecteurs $-\vec{i}$ et $\vec{i}$ ne sont pas égaux, mais ils sont colinéaires ; ils ont donc la même direction.

- On a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left(-\frac{1}{2}\right) = x'\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{i} + y'\left(-\frac{1}{2}\right)\vec{j} = 0\vec{i} - \frac{9}{4}\vec{j} = -\frac{9}{4}\vec{j} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M\left(-\frac{1}{2}\right)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{j}$, ce qui veut dire que la tangente est verticale.

- On a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(1) = x'(1)\vec{i} + y'(1)\vec{j} = 3\vec{i} + 0\vec{j} = 3\vec{i} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(1)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{i}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

3. D'après le tableau de variations, nous avons deux branches infinies à étudier : une lorsque t tend vers $+\infty$ et une autre lorsque t tend vers $-\infty$.

► Étude de la branche infinie lorsque t tend vers $+\infty$: compte tenu des limites trouvées à la question 1.b, nous devons calculer

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 - 3t}{t^2 + t}.$$

Or on sait que la limite en $\pm\infty$ d'une fraction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré. Donc :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t = +\infty.$$

Par conséquent, la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) lorsque t tend vers $+\infty$.

► Étude de la branche infinie lorsque t tend vers $-\infty$: c'est exactement le même raisonnement que pour $t \rightarrow +\infty$. On obtient :

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t^3}{t^2} = \lim_{t \rightarrow -\infty} t = -\infty.$$

Ainsi la courbe admet une branche parabolique de direction (Oy) lorsque t tend vers $-\infty$.

4. Calcul des coordonnées des points $M(-2)$ et $M(0)$:

$$\begin{aligned} x(-2) &= 4 - 2 = 2; & y(-2) &= -8 + 6 = -2; \\ x(0) &= 0 + 0 = 0; & y(0) &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

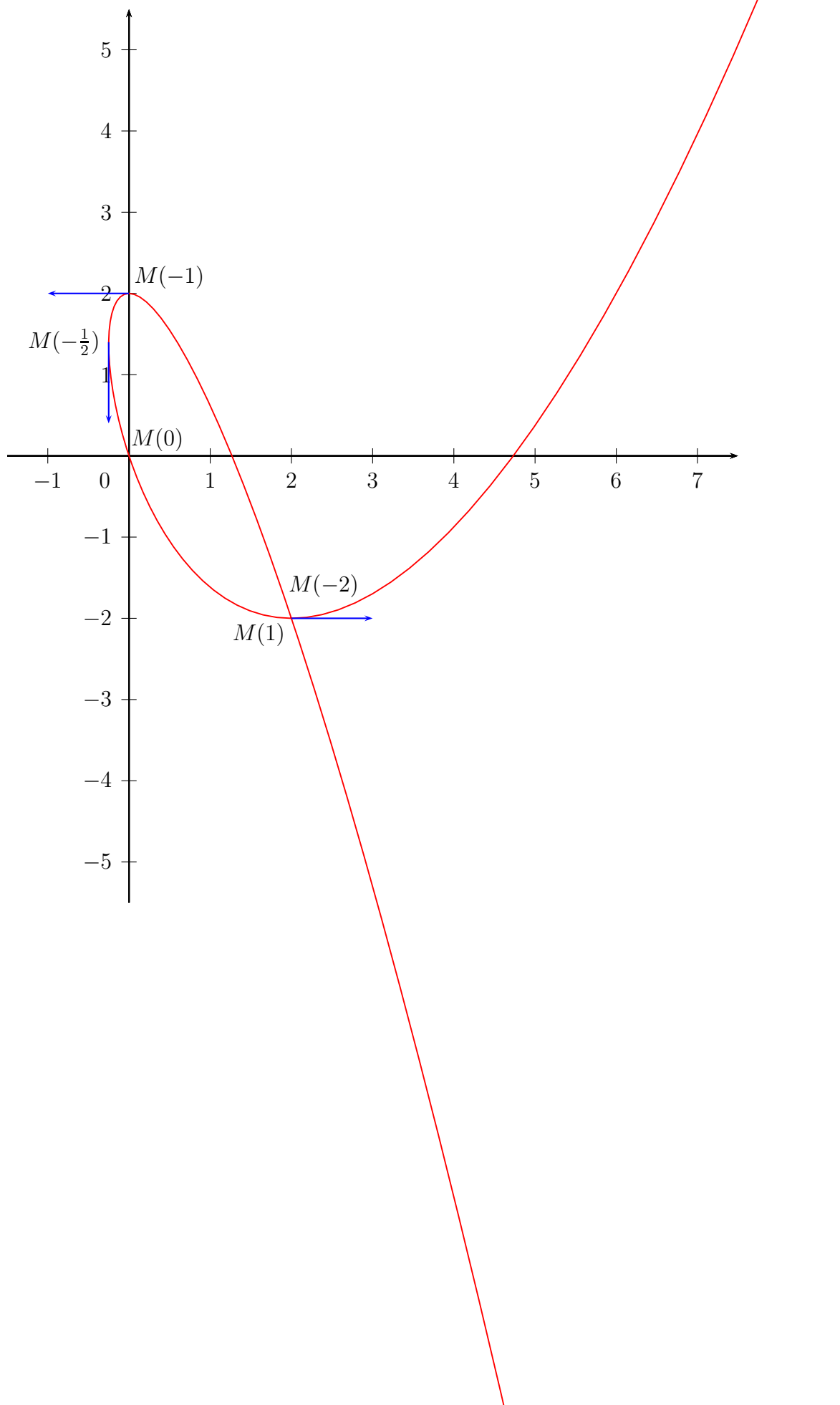
En particulier, on remarque que $M(-2) = M(1)$ qui ont, tous les deux, pour coordonnées $(2; -2)$.

Attention ! Même si $M(-2) = M(1)$, ce n'est pas parce que la tangente en $M(1)$ est horizontale (voir question 2) que la tangente en $M(-2)$ l'est aussi. Si l'on regarde de près (même si cela n'était pas demandé dans l'énoncé), on obtient :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(-2) = x'(-2)\vec{i} + y'(-2)\vec{j} = -3\vec{i} + 9\vec{j} = 3(-\vec{i} + 3\vec{j}) \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(-1)$ est dirigée par le vecteur $-\vec{i} + 3\vec{j}$.

5. Tracé de la courbe : on commence par placer les points vus aux questions précédentes, ainsi que les vecteurs donnant la direction de leur tangente, puis on respecte le tableau de variations et les branches infinies.



Exercice 2. On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \cos(2t) + 2 \cos t \end{cases}$$

Première partie.

1. a) Calcul des dérivées. À l'aide des formules de dérivation $(\cos(u))' = -u' \sin(u)$ et $(\sin(u))' = u' \cos(u)$, on obtient pour tout réel t :

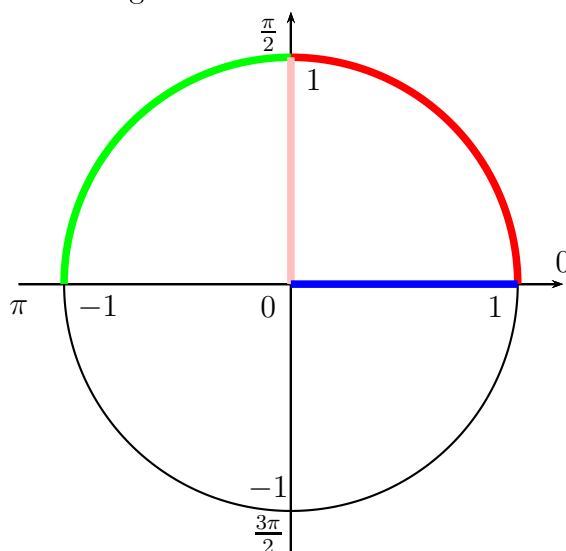
$$\begin{cases} x'(t) &= \cos t \\ y'(t) &= -2 \sin(2t) - 2 \sin t \end{cases}$$

- b) Sachant que $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$ pour tout réel t , on obtient :

$$y'(t) = -2 \times 2 \sin t \cos t - 2 \sin t = -2 \sin t (2 \cos t + 1)$$

2. • Étude du signe de $x'(t)$ sur $[0; \pi]$.

En s'appuyant sur le cercle trigo suivant



on constate que, pour tout réel $t \in [0; \pi]$ (zones rouge puis verte du dessin), on a :

$\cos t > 0$ (zone bleue du dessin) ssi $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ (zone rouge du dessin).

Ainsi $x'(t) > 0$ ssi $\cos t > 0$, ssi $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$.

- Étude du signe de $y'(t)$ sur $[0; \pi]$.

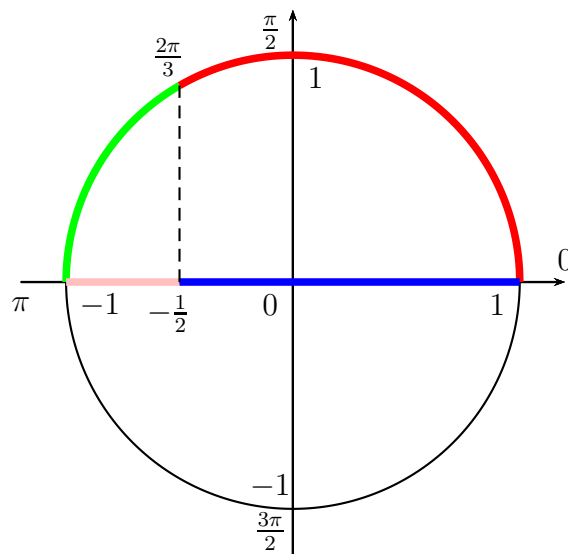
On a vu à la question 1.b. que $y'(t) = -2 \sin t (2 \cos t + 1)$. On va donc faire un tableau de signes pour déterminer le signe de $y'(t)$.

Tout d'abord, en s'appuyant sur le cercle trigo vu précédemment, on constate que, pour tout $t \in [0; \pi]$ (zones rouge puis verte du dessin), on a toujours $\sin t \geq 0$ (zone rose du dessin).

Ensuite, pour déterminer le signe de $2 \cos t + 1$, on peut remarquer que :

$$2 \cos t + 1 > 0 \text{ ssi } \cos t > -\frac{1}{2}.$$

Or, en s'appuyant sur le cercle trigo suivant



on constate que, pour tout réel $t \in [0; \pi]$ (zones rouge puis verte du dessin), on a :
 $\cos t > -\frac{1}{2}$ (zone bleue du dessin) ssi $0 \leq t < \frac{2\pi}{3}$ (zone rouge du dessin).
 Cela nous permet de dresser le tableau de signes pour $y'(t)$:

t	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
-2		—	—
$\sin t$	0	+	0
$2 \cos t + 1$		+	0 —
$y'(t)$	0	—	0 + 0

- Tableau de variations.

Attention! RAS-LE-BOL de voir tout un tas d'étudiants qui balancent un tableau de variations sans justifier les signes de $x'(t)$ et de $y'(t)$. Ils croient naïvement que résoudre $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$ suffit... Pourtant, cela fait maintenant 3 ans que je ne cesse de le répéter : il faut justifier ses résultats, notamment les signes dans les tableaux de variations et les calculs de limites ! Ici, on a bien vu plus haut qu'il y avait tout un paquet d'arguments à mettre en avant pour trouver les signes de $x'(t)$ et de $y'(t)$, et c'est pour cela qu'il y avait beaucoup de points dans le barème pour ces justifications.

t	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
$x'(t)$		+	0	—
x	0	↗ 1	↘ $\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘ 0
y	3	↘ -1	↘ $-\frac{3}{2}$	↗ -1
$y'(t)$	0	—	0	+ 0

Détails des calculs pour le tableau de variations :

$$x(0) = \sin(0) = 0;$$

$$y(0) = \cos 0 + 2 \cos 0 = 1 + 2 = 3;$$

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1;$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos \pi + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 + 0 = -1;$$

$$x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$y\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} + 2 \times \frac{-1}{2} = -\frac{3}{2};$$

$$x(\pi) = \sin(\pi) = 0;$$

$$y(\pi) = \cos(2\pi) + 2 \cos \pi = 1 - 2 = -1.$$

3. ► Tangente au point $M(0)$? On a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0) = x'(0)\vec{i} + y'(0)\vec{j} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = \vec{i} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(0)$ est dirigée par ce vecteur, ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

► Tangente au point $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$? On a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left(\frac{\pi}{2}\right) = x'\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{i} + y'\left(\frac{\pi}{2}\right)\vec{j} = 0\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{j} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est dirigée par le vecteur $\vec{j}$, ce qui veut dire que la tangente est verticale.

► Tangente au point $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$? On a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = x'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{i} + y'\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} + 0\vec{j} = -\frac{1}{2}\vec{i} \neq \vec{0}.$$

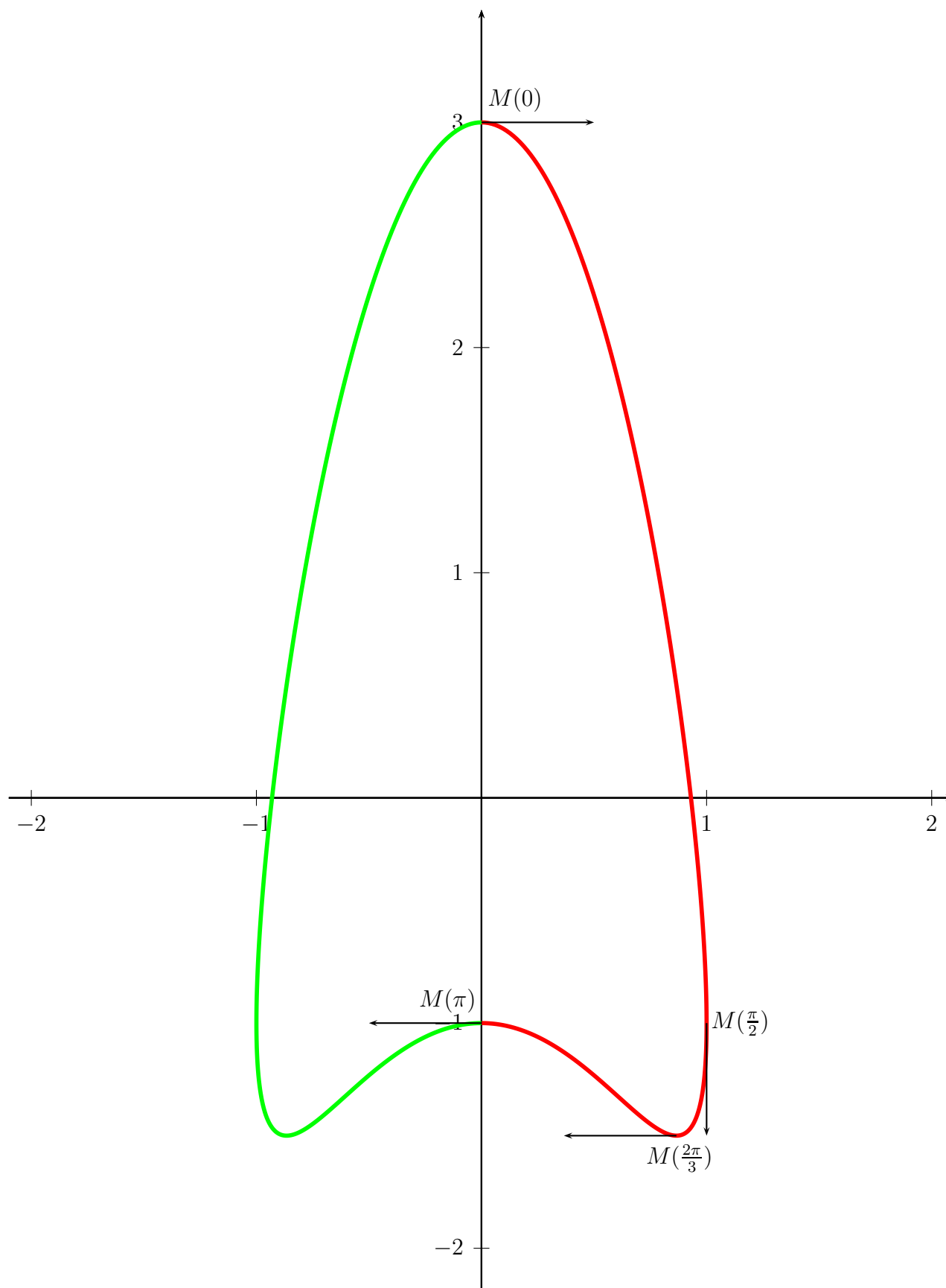
On peut donc dire que la tangente en $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ est dirigée par le vecteur $\vec{i}$, ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

► Tangente au point $M(\pi)$? On a :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(\pi) = x'(\pi)\vec{i} + y'(\pi)\vec{j} = -1\vec{i} + 0\vec{j} = -\vec{i} \neq \vec{0}.$$

On peut donc dire que la tangente en $M(\pi)$ est dirigée par ce vecteur, ou par le vecteur $\vec{i}$ (car ce sont des vecteurs colinéaires), ce qui veut dire que la tangente est horizontale.

4. Tracé de la courbe : on commence par placer les points vus aux questions précédentes, ainsi que les vecteurs donnant la direction de leur tangente, puis on respecte le tableau de variations. On obtient ainsi la courbe rouge correspondant à $[0; \pi]$.



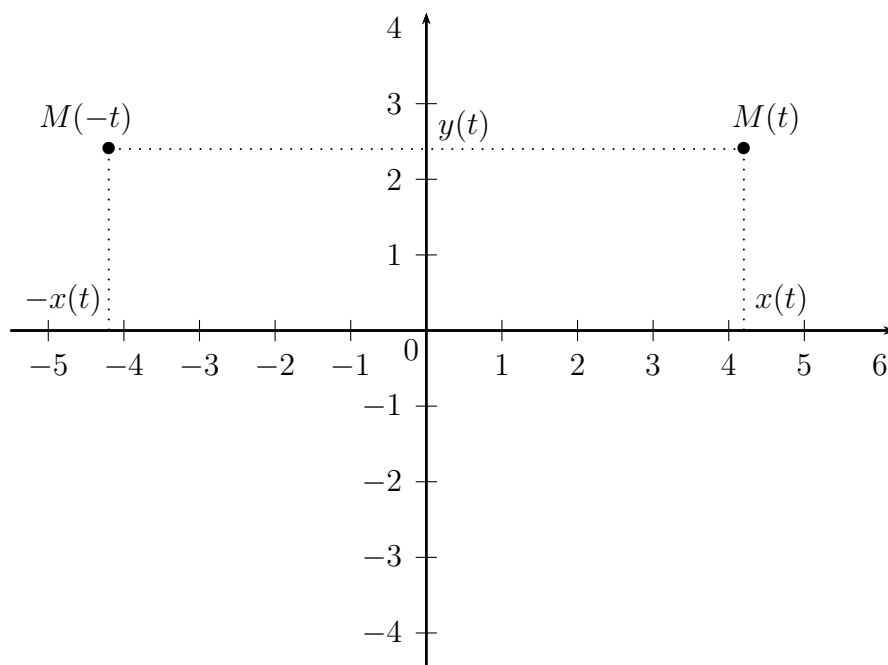
Ici la partie rouge correspond à $M(t)$ avec $t \in [0; \pi]$. Cela est la conclusion de la première partie.
 La partie verte correspond à $M(t)$ avec $t \in [-\pi; 0]$; elle a été obtenue par symétrie de la partie rouge par rapport à l'axe des ordonnées. Il s'agit de la conclusion de la seconde partie.
 L'ensemble des parties rouge et verte correspond à $M(t)$ avec $t \in [-\pi; \pi]$, ce qui correspond bien (d'après la dernière question de la seconde partie) à toute la courbe $M(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Seconde partie. Étude de la courbe pour $t \in \mathbb{R}$.

1. On sait que cosinus est une fonction paire et que sinus est impaire, donc $\cos(-a) = \cos(a)$ pour tout réel a , et $\sin(-a) = -\sin(a)$ pour tout réel a (si besoin, dessiner un cercle trigo pour le voir). D'où :

$$\begin{cases} x(-t) &= \sin(-t) = -\sin t = -x(t) \\ y(-t) &= \cos(2 \times (-t)) + 2 \cos(-t) = \cos(-2t) + 2 \cos(-t) = \cos(2t) + 2 \cos t = y(t) \end{cases}$$

Autrement dit, en considérant $M(t)$ de coordonnées $(x(t), y(t))$



on constate que $M(-t)$ est le symétrique de $M(t)$ par rapport à l'axe des ordonnées.

2. On sait que cosinus et sinus sont 2π -périodiques, donc $\cos(a + 2\pi) = \cos(a)$ pour tout réel a , et $\sin(a + 2\pi) = \sin(a)$ pour tout réel a . D'où :

$$\begin{cases} x(t + 2\pi) &= \sin(t + 2\pi) = \sin t = x(t) \\ y(t + 2\pi) &= \cos(2 \times (t + 2\pi)) + 2 \cos(t + 2\pi) = \cos(2t + 4\pi) + 2 \cos(t + 2\pi) \\ &= \cos(2t) + 2 \cos t = y(t) \end{cases}$$

Conclusion. $M(t + 2\pi) = M(t)$ pour tout réel t .

3. On a déjà la courbe rouge, disons $\mathcal{C}_1$, obtenue à la fin de la première partie : il s'agit de l'ensemble des points $M(t)$ avec $t \in [0; \pi]$.

D'après la question 1 de cette seconde partie, en traçant la courbe symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des ordonnées, on obtient la courbe verte, disons $\mathcal{C}_2$, qui correspond à l'ensemble des points $M(t)$ avec $t \in [-\pi; 0]$.

Notons $\mathcal{C}$ la réunion de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$. Alors la courbe $\mathcal{C}$ correspond à l'ensemble des points $M(t)$ avec $t \in [-\pi; \pi]$.

L'intervalle $[-\pi; \pi]$ étant de longueur 2π , la question 2 assure que la courbe $\mathcal{C}$ est en fait l'ensemble des points $M(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

4. Voir le tracé complet pour $t \in \mathbb{R}$ sur le tracé de la question 4 de la première partie.

Fin du corrigé