

- Seul document autorisé : le formulaire distribué en première année
- Calculatrice et téléphone portable interdits
- Toutes les réponses devront être justifiées
- **La rédaction comptera pour une part non négligeable de la note**
- Énoncé à rendre avec la copie

Nom :

Prénom :

Exercice 1 ($\simeq 10$ points). On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) &= t^2 + t \\ y(t) &= t^3 - 3t \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées cartésiennes $(x(t); y(t))$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On souhaite déterminer le lieu des points $M(t)$ lorsque le paramètre t décrit $\mathbb{R}$.

1. a) Calculer les dérivées des fonctions x et y sur $\mathbb{R}$.
b) Calculer les limites suivantes : $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t)$ ainsi que $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t)$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t)$.
c) Dresser le tableau de variations des fonctions x et y sur $\mathbb{R}$. On calculera également les valeurs au bout des flèches.
2. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe en chacun des points suivants : $M(-1)$, $M\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $M(1)$. Si l'une de ces tangentes est verticale ou horizontale, le préciser.
3. Étudier sur $\mathbb{R}$ les éventuelles branches infinies.
4. Déterminer les coordonnées de chacun des points suivants : $M(-2)$ et $M(0)$.
5. Tracer l'allure de cette courbe en respectant particulièrement les résultats trouvés aux questions précédentes.
 - Pour le tracé, il faudra absolument respecter les consignes suivantes :
 - le repère doit être orthonormé avec 2 cm correspondant à 1 ;
 - l'axe des abscisses sera gradué de -1 à 7 ;
 - l'axe des ordonnées sera gradué de -5 à 5 .
 - Pour le tracé (et uniquement pour le tracé) on pourra utiliser la valeur approchée suivante :

$$\frac{11}{8} \simeq 1,4$$

Exercice 2 ($\simeq 10$ points). On considère la courbe paramétrée définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} x(t) &= \sin t \\ y(t) &= \cos(2t) + 2 \cos t \end{cases}$$

On note $M(t)$ le point de coordonnées cartésiennes $(x(t); y(t))$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On souhaite déterminer le lieu des points $M(t)$ lorsque le paramètre t décrit $\mathbb{R}$.

Première partie. Étude de la courbe pour $t \in [0; \pi]$.

1. a) Calculer les dérivées des fonctions x et y sur $[0; \pi]$.
b) Après avoir utilisé la formule de trigonométrie $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$, factoriser $y'(t)$ pour tout $t \in [0; \pi]$.
2. Dresser le tableau de variations des fonctions x et y sur l'intervalle $[0; \pi]$. On calculera également les valeurs au bout des flèches.
3. Déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe en chacun des points suivants : $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ et $M(\pi)$. Si l'une de ces quatre tangentes est verticale ou horizontale, le préciser.
4. Tracer l'allure de la courbe formée des points $M(t)$ avec $t \in [0; \pi]$. Il est demandé de respecter particulièrement les résultats trouvés aux questions précédentes.
 - Pour le tracé, il faudra absolument respecter les consignes suivantes :
 - le repère doit être orthonormé avec 4 cm correspondant à 1 ;
 - l'axe des abscisses sera gradué de -2 à 2 ;
 - l'axe des ordonnées sera gradué de -2 à 3 .
 - Si besoin, on pourra utiliser pour le tracé (et uniquement pour le tracé) la valeur approchée suivante :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \simeq 0,87$$

Seconde partie. Étude de la courbe pour $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la transformation géométrique qui permet de passer du point $M(-t)$ au point $M(t)$.
2. Déterminer la transformation géométrique qui permet de passer du point $M(t + 2\pi)$ au point $M(t)$.
3. À l'aide des questions précédentes, expliquer comment récupérer la courbe représentant tous les points $M(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$ à partir de la courbe tracée à la fin de la première partie.
4. Tracer, sur le dessin de la première partie, la courbe représentant tous les points $M(t)$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Fin du devoir