

Exercice 1 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Polynôme caractéristique :

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $L_3 := L_3 + L_2$:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 3 - \lambda & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $C_3 := C_3 - C_2$:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 1 + \lambda \\ 0 & 3 - \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième ligne, on obtient

$$P_A(\lambda) = (3 - \lambda) \times (-1) \times \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 1 + \lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3) \left[(1 - \lambda)(1 + \lambda) - 0 \times 1 \right]$$

D'où

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(1 - \lambda)(1 + \lambda).$$

2. On sait que λ est une valeur propre de A ssi $P_A(\lambda) = 0$.

Or, puisque $P_A(\lambda) = (\lambda - 3)(1 - \lambda)(1 + \lambda)$, on a

$$\begin{array}{llllll} P_A(\lambda) = 0 & \text{ssi} & \lambda - 3 = 0 & \text{ou} & 1 - \lambda = 0 & \text{ou} & 1 + \lambda = 0 \\ & & \lambda = 3 & \text{ou} & \lambda = 1 & \text{ou} & \lambda = -1 \end{array}$$

Les valeurs propres de A sont donc 3 ; 1 et -1 .

Remarque. La somme des valeurs propres vaut $3 + 1 + (-1) = 3$. Elle est bien égale à la trace de A car $\text{Tr}(A) = 1 + 1 + 1 = 3$.

Attention aux rédactions foireuses ! Est-ce trop demandé de commencer par écrire qu'on résout $P_A(\lambda) = 0$ pour obtenir les valeurs propres ? Est-ce trop demandé d'écrire des OU et pas des ET ni des RIEN DU TOUT sur la ligne « $\lambda - 3 = 0$ ou $1 - \lambda = 0$ ou $1 + \lambda = 0$ » ? Est-ce trop demandé de répondre à la question posée et d'avoir une phrase de conclusion du genre « Les valeurs propres de A sont... » ? Évidemment, certains perdent des points sur ce manque de soin apporté à la rédaction.

3. • Espace propre E_3 associé à la valeur propre 3 :

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 &\iff AV = 3V \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = 3x \\ x + y + 2z = 3y \\ -x + 2y + z = 3z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -2x + y + z = 0 & L_1 \\ \textcolor{red}{x} - 2y + 2z = 0 & L_2 \\ -x + 2y - 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3y + 5z = 0 & \text{en ayant effectué } L_1 := L_1 + 2 \times L_2 \\ \textcolor{red}{x} - 2y + 2z = 0 \\ 0 = 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 + L_2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

La première équation nous donne $y = \frac{5z}{3}$. Donc :

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 &\iff \begin{cases} y = \frac{5z}{3} \\ x = 2y - 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \frac{5z}{3} \\ x = \frac{10z}{3} - 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = \frac{5z}{3} \\ x = \frac{4z}{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_3 &\iff x = \frac{4z}{3} \text{ et } y = \frac{5z}{3} \\
 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4z}{3} \\ \frac{5z}{3} \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où E_3 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff AV = V \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = x \\ x + y + 2z = y \\ -x + 2y + z = z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y + z = 0 \\ x + 2z = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -2z \\ -(-2z) + 2 \times (-z) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -2z \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -2z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff x = -2z \text{ et } y = -z \\
 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où E_1 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- Espace propre E_{-1} associé à la valeur propre -1 :

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} &\iff AV = -V \\
 &\iff \begin{cases} x + y + z = -x \\ x + y + 2z = -y \\ -x + 2y + z = -z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 2x + y + z = 0 & L_1 \\ \textcolor{red}{x} + 2y + 2z = 0 & L_2 \\ -x + 2y + 2z = 0 & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -3y - 3z = 0 & \text{en ayant effectué } L_1 := L_1 - 2 \times L_2 \\ \textcolor{red}{x} + 2y + 2z = 0 \\ 4y + 4z = 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 + L_2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -2y - 2z \\ y = -z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -z \\ x = -2 \times (-z) - 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{-1} &\iff x = 0 \text{ et } y = -z \\
 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où E_{-1} est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. A est diagonalisable car A est une matrice de taille 3 possédant trois valeurs propres distinctes.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{4} & \textcolor{green}{-2} & 0 \\ \textcolor{red}{5} & \textcolor{green}{-1} & \textcolor{blue}{-1} \\ \textcolor{red}{1} & \textcolor{green}{1} & 1 \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{green}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{-1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 10 & 5 & -2 \\ -10 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_B(\lambda) = \det(B - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -2 & 1 \\ 10 & 5 - \lambda & -2 \\ -10 & -4 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $L_3 := L_3 + L_2$:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -2 & 1 \\ 10 & 5 - \lambda & -2 \\ 0 & 1 - \lambda & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

On effectue $C_3 := C_3 - C_2$:

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -4 - \lambda & -2 & 3 \\ 10 & 5 - \lambda & \lambda - 7 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la troisième ligne, on obtient

$$P_B(\lambda) = (1 - \lambda) \times (-1) \times \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 3 \\ 10 & \lambda - 7 \end{vmatrix}.$$

D'où

$$P_B(\lambda) = (\lambda - 1) \times [(-4 - \lambda)(\lambda - 7) - 30] = (\lambda - 1) \times [-4\lambda + 28 - \lambda^2 + 7\lambda - 30]$$

Finalement

$$P_B(\lambda) = (\lambda - 1) \times [-\lambda^2 + 3\lambda - 2] = (1 - \lambda) \times [\lambda^2 - 3\lambda + 2].$$

2. On sait que λ est une valeur propre de B ssi $P_B(\lambda) = 0$. Or, puisque $P_B(\lambda) = (1 - \lambda) \times [\lambda^2 - 3\lambda + 2]$, on a

$$P_B(\lambda) = 0 \quad \begin{array}{ll} \text{ssi} & 1 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ \text{ssi} & \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \end{array}$$

Concernant le trinôme $\lambda^2 - 3\lambda + 2$, on calcule le discriminant $\Delta = 9 - 8 = 1$, puis on déduit ses racines $\lambda_1 = \frac{3-1}{2} = 1$ et $\lambda_2 = \frac{3+1}{2} = 2$. Ainsi

$$P_B(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 2$$

Les valeurs propres de B sont donc 1 et 2. On a même montré que 2 est une valeur propre simple de B et que 1 est une valeur propre double de B .

Remarque. La somme des valeurs propres vaut $2 + 1 + 1 = 4$ (avec 1 qui est comptée deux fois car valeur propre double). Elle est bien égale à la trace de B car $\text{Tr}(B) = (-4) + 5 + 3 = 4$.

3. • Espace propre E_2 associé à la valeur propre 2 :

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff BV = 2V \\
 &\iff \begin{cases} -4x & - & 2y & + & z & = & 2x \\ 10x & + & 5y & - & 2z & = & 2y \\ -10x & - & 4y & + & 3z & = & 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -6x & - & 2y & + & z & = & 0 & L_1 \\ 10x & + & 3y & - & 2z & = & 0 & L_2 \\ -10x & - & 4y & + & z & = & 0 & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -6x & - & 2y & + & z & = & 0 & L_1 \\ -2x & - & y & & & = & 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 + 2 \times L_1 \\ -4x & - & 2y & & & = & 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - L_1 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} z = 6x + 2y \\ y = -2x \\ y = -2x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} z = 6x + 2 \times (-2x) \\ y = -2x \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} z = 2x \\ y = -2x \end{cases}
 \end{aligned}$$

Cela donne :

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff y = -2x \quad \text{et} \quad z = 2x \\
 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 2x \end{pmatrix} \\
 &\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où E_2 est la droite vectorielle portée par le vecteur $\vec{u}_1$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- Espace propre E_1 associé à la valeur propre 1 :

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff BV = V \\
 &\iff \begin{cases} -4x & - & 2y & + & z & = & x \\ 10x & + & 5y & - & 2z & = & y \\ -10x & - & 4y & + & 3z & = & z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -5x & - & 2y & + & \textcolor{red}{z} & = & 0 & L_1 \\ 10x & + & 4y & - & 2z & = & 0 & L_2 \\ -10x & - & 4y & + & 2z & = & 0 & L_3 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} -5x & - & 2y & + & \textcolor{red}{z} & = & 0 & L_1 \\ & & & & 0 & = & 0 & \text{en ayant effectué } L_2 := L_2 + 2 \times L_1 \\ & & & & 0 & = & 0 & \text{en ayant effectué } L_3 := L_3 - 2 \times L_1 \end{cases} \\
 &\iff -5x - 2y + z = 0 \\
 &\iff z = 5x + 2y
 \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1 &\iff z = 5x + 2y \\
 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 5x + 2y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où E_1 est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$ où $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. ★ Première rédaction possible :

Les espaces propres E_2 et E_1 fournissent, en tout, trois vecteurs propres : les vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{u}_3$. Comme les espaces propres fournissent trois vecteurs pour une matrice de départ B qui est de taille 3, la matrice B est diagonalisable.

★ Seconde rédaction possible :

L'espace propre E_2 est une droite vectorielle ; on a donc $\dim(E_2) = 1$.

L'espace propre E_1 est un plan vectoriel ; on a donc $\dim(E_1) = 2$.

Puisque $\dim(E_2) + \dim(E_1) = 1 + 2 = 3$ et que B est de taille 3, B est diagonalisable.

5. On pose $P = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & \textcolor{green}{1} & 0 \\ \textcolor{red}{-2} & 0 & \textcolor{blue}{1} \\ \textcolor{red}{2} & \textcolor{green}{5} & \textcolor{blue}{2} \end{pmatrix}$. Alors on peut vérifier que P est inversible et :

$$D = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \textcolor{green}{1} & 0 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{1} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3 ($\simeq 6,5$ points). Étant donné un réel a , on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & a-2 \\ a+1 & 3-a & 2 \\ a-2 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

1. Polynôme caractéristique :

$$P_M(\lambda) = \det(M - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & a-2 \\ a+1 & 3-a-\lambda & 2 \\ a-2 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la deuxième colonne, on obtient

$$P_M(\lambda) = (3-a-\lambda) \times (+1) \times \begin{vmatrix} a-\lambda & a-2 \\ a-2 & a-\lambda \end{vmatrix}$$

ce qui donne :

$$P_M(\lambda) = (3-a-\lambda) \left[(a-\lambda)^2 - (a-2)^2 \right]$$

Or, en appliquant l'identité remarquable $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$, on obtient :

$$P_M(\lambda) = (3-a-\lambda) \left[(a-\lambda) - (a-2) \right] \left[(a-\lambda) + (a-2) \right]$$

D'où

$$P_M(\lambda) = (3-a-\lambda) \left[a-\lambda-a+2 \right] \left[a-\lambda+a-2 \right]$$

ce qui donne

$$P_M(\lambda) = (3-a-\lambda)(2-\lambda)(2a-2-\lambda)$$

Remarque 1. Au pire, si on ne voit pas l'identité remarquable $x^2 - y^2$, on peut développer le crochet pour trouver :

$$P_M(\lambda) = (3-a-\lambda) \left[(a-\lambda)^2 - (a-2)^2 \right] = (3-a-\lambda) \left[\lambda^2 - 2a\lambda + 4a - 4 \right]$$

On peut ensuite calculer le discriminant Δ du polynôme du second degré situé entre crochets : $\Delta = 4(a^2 - 4a + 4)$. Mais là il faut repérer l'identité remarquable $x^2 - 2xy + y^2$ et en déduire $\Delta = 4(a-2)^2$ ce qui permet de trouver les racines $\frac{2a \pm 2(a-2)}{2} = a \pm (a-2) = 2$ ou $2a-2$.

Remarque 2. Comme je l'ai vu dans quelques copies, il y avait aussi moyen de faire quelques manipulations sur le déterminant de départ avant de développer par rapport à la colonne 2. En effet, en faisant $L_1 := L_1 + L_3$, on obtenait :

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & 0 & a-2 \\ a+1 & 3-a-\lambda & 2 \\ a-2 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a-2-\lambda & 0 & 2a-2-\lambda \\ a+1 & 3-a-\lambda & 2 \\ a-2 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix}$$

puis en faisant $C_1 := C_1 - C_3$, on trouvait :

$$P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2a-2-\lambda \\ a-1 & 3-a-\lambda & 2 \\ -2+\lambda & 0 & a-\lambda \end{vmatrix}$$

Ainsi, en développant ce dernier déterminant par rapport à la colonne 2, on retombait quasi directement sur la version aboutie :

$$P_M(\lambda) = (3-a-\lambda)(2-\lambda)(2a-2-\lambda)$$

2. On sait que λ est une valeur propre de M ssi $P_M(\lambda) = 0$.

Or, puisque $P_M(\lambda) = (3 - a - \lambda)(2 - \lambda)(2a - 2 - \lambda)$, on a

$$P_M(\lambda) = 0 \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{lll} 3 - a - \lambda = 0 & \text{ou} & 2 - \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad 2a - 2 - \lambda = 0 \\ \text{ssi} & \lambda = 3 - a & \text{ou} \quad \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda = 2a - 2 \end{array}$$

Par conséquent 2 et $3 - a$ et $2a - 2$ sont les valeurs propres de M .

★ Si $3 - a = 2$, c'est-à-dire si $a = 1$, alors M possède exactement deux valeurs propres :
 $2a - 2 = 0$ (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

★ Si $2a - 2 = 2$, c'est-à-dire si $a = 2$, alors M possède exactement deux valeurs propres :
 $3 - a = 1$ (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double).

★ Si $2a - 2 = 3 - a$, c'est-à-dire si $3a = 5$, c'est-à-dire encore si $a = \frac{5}{3}$, alors M possède exactement deux valeurs propres :

$$2 \text{ (valeur propre simple) et } 2a - 2 = 3 - a = \frac{4}{3} \text{ (valeur propre double).}$$

★ Dans tous les autres cas, c'est-à-dire si a est différent à la fois de 1, de 2 et de $\frac{5}{3}$, alors M possède trois valeurs propres distinctes : 2 et $3 - a$ et $2a - 2$.

3. ► Si a est différent à la fois de 1, de 2 et de $\frac{5}{3}$, alors M possède trois valeurs propres distinctes. Comme M est de taille 3, elle est forcément diagonalisable.

► Plaçons-nous dans le cas où $a = 1$. Dans ce cas, on a vu que M possède deux valeurs propres 0 et 2.

La valeur propre 0 est simple ; on est donc sûr que l'espace propre E_0 est une droite vectorielle et qu'il fournira un vecteur.

Par conséquent, pour savoir si M est diagonalisable, il suffit de déterminer l'espace propre E_2 : en effet, si c'est une droite, M ne sera pas diagonalisable (car les espaces propres E_2 et E_0 ne fourniront, en tout, que deux vecteurs) ; si c'est un plan, M sera diagonalisable (car les espaces propres E_2 et E_0 fourniront bien trois vecteurs).

$$\begin{aligned} V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff MV = 2V \\ &\iff \begin{cases} x & - & z & = & 2x \\ 2x & + & 2y & + & 2z & = & 2y \\ -x & & & + & z & = & 2z \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -z \\ x = -z \\ x = -z \end{cases} \\ &\iff x = -z \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &\iff V = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où E_2 est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $a = 1$, M est diagonalisable.

► Plaçons-nous dans le cas où $a = 2$. Dans ce cas, on a vu que M possède deux valeurs propres 1 (valeur propre simple) et 2 (valeur propre double). En suivant un raisonnement analogue à celui effectué pour le cas $a = 1$, il suffit de déterminer l'espace propre E_2 pour savoir si M est diagonalisable : si c'est une droite, M ne sera pas diagonalisable ; si c'est un plan, M sera diagonalisable.

$$\begin{aligned}
 V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_2 &\iff MV = 2V \\
 &\iff \begin{cases} 2x &= 2x \\ 3x + y + 2z &= 2y \\ 2z &= 2z \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 3x - y + 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\
 &\iff y = 3x + 2z \\
 &\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 3x + 2z \\ z \end{pmatrix} \\
 &\iff V = x \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ avec } x \in \mathbb{R} \text{ et } z \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

D'où E_2 est le plan vectoriel dirigé par les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $a = 2$, M est diagonalisable.

► Plaçons-nous dans le cas où $a = \frac{5}{3}$. Dans ce cas, on a vu que M possède deux valeurs propres 2 (valeur propre simple) et $\frac{4}{3}$ (valeur propre double). En suivant un raisonnement analogue à celui effectué pour le cas $a = 1$, il suffit de déterminer l'espace propre $E_{\frac{4}{3}}$ pour savoir si M est diagonalisable : si c'est une droite, M ne sera pas diagonalisable ; si c'est un plan, M sera diagonalisable.

$$\begin{aligned}
V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_{\frac{4}{3}} &\iff MV = \frac{4}{3}V \\
&\iff \begin{cases} \frac{5}{3}x & - \frac{1}{3}z & = \frac{4}{3}x \\ \frac{8}{3}x & + \frac{4}{3}y & + 2z & = \frac{4}{3}y \\ -\frac{1}{3}x & & + \frac{5}{3}z & = \frac{4}{3}z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \frac{1}{3}x & - \frac{1}{3}z & = 0 \\ \frac{8}{3}x & + 2z & = 0 \\ -\frac{1}{3}x & + \frac{1}{3}z & = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ 8x + 6z = 0 \\ x = z \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ 8z + 6z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = z \\ 14z = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
&\iff V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ avec } y \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'où $E_{\frac{4}{3}}$ est la droite vectorielle dirigée par le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Conclusion. Lorsque $a = \frac{5}{3}$, M n'est pas diagonalisable.

Conclusion générale. M est diagonalisable si et seulement si $a \neq \frac{5}{3}$.

FIN DU CORRIGÉ