

- Aucun document autorisé. Calculatrice et téléphone portable interdits
- Toutes les réponses devront être justifiées
- **La rédaction comptera pour une part non négligeable de la note**
- Énoncé à rendre avec la copie Nom : Prénom :

Exercice 1 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de A .
2. Déterminer les valeurs propres de A .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision le sous-espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale. Que vaut D ? (il n'est pas demandé de vérifier que P est inversible, ni de calculer la matrice inverse de P , ni de faire le calcul explicite de $P^{-1}AP$)

Exercice 2 ($\simeq 6,75$ points). On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 1 \\ 10 & 5 & -2 \\ -10 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de B .
2. Déterminer les valeurs propres de B .
3. Pour chacune des valeurs propres, déterminer avec précision le sous-espace propre associé, c'est-à-dire en donner une interprétation précise en terme de droite, plan...
4. La matrice B est-elle diagonalisable ?
5. Déterminer, si cela est possible, une matrice inversible P telle que $D = P^{-1}BP$ soit diagonale. Que vaut D ? (il n'est pas demandé de vérifier que P est inversible, ni de calculer la matrice inverse de P , ni de faire le calcul explicite de $P^{-1}BP$)

Exercice 3 ($\simeq 6,5$ points). Étant donné un réel a , on considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & a-2 \\ a+1 & 3-a & 2 \\ a-2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

1. Calculer et factoriser le polynôme caractéristique de M .
2. Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice M possède-t-elle exactement deux valeurs propres ?
3. Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice M est-elle diagonalisable ? Pour quelle(s) valeur(s) de a la matrice M n'est-elle pas diagonalisable ?