Exercice 1 ($\simeq 1$ points).

Calcul de $\ell = 5 - 2 \times \dfrac{\frac{4}{5} - \frac{5}{4}}{-2 + \frac{4}{5}}$

$$\ell = 5 - 2 \times \frac{\frac{16}{20} - \frac{25}{20}}{\frac{-10}{5} + \frac{4}{5}} = 5 - 2 \times \frac{-\frac{9}{20}}{-\frac{6}{5}} = 5 - 2 \times \frac{\frac{9}{20}}{\frac{6}{5}} = 5 - 2 \times \frac{9}{20} \times \frac{5}{6}$$

Finalement

$$\ell = 5 - \frac{2 \times 3 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 5 \times 2 \times 3} = 5 - \frac{3}{4} = \frac{20 - 3}{4} = \frac{17}{4}$$

Exercice 2 ($\simeq 9,5$ points). On considère f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{1 - 2x}$

1. Les expressions $x^2 - 2x + 3$ et $1 - 2x$ sont définies sur tout $\mathbb{R}$. Comme $f(x)$ est un quotient, son dénominateur ne doit pas s'annuler.
   Donc $f(x)$ est définie ssi $1 - 2x \neq 0$,
   ssi $1 \neq 2x$,
   ssi $\frac{1}{2} \neq x$,
   ssi $x \neq \frac{1}{2}$.

   Conclusion. L'ensemble de définition D_f de la fonction f est : $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

   Remarque. Pour rédiger la conclusion, on a plusieurs options :
   - on peut écrire comme ci-dessus « l'ensemble de définition de f est : $D_f = \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ » ;
   - on peut écrire « f est définie sur $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ » ;
   - on peut écrire « $f(x)$ est définie pour tout $x \in \left]-\infty; \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$ ».

   Mais il ne faut surtout pas écrire un mélange des options précédentes !

2. Dans le but de dériver f sur D_f, on constate d'abord que f est un quotient de fonctions.

   Posons $u(x) = x^2 - 2x + 3$ et $v(x) = 1 - 2x$.
   On obtient immédiatement $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = -2$.
   D'où, pour tout $x \in D_f$, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{(v(x))^2} = \frac{(2x - 2) \times (1 - 2x) - (x^2 - 2x + 3) \times (-2)}{(1 - 2x)^2}$$

   En développant le numérateur, on obtient :

$$f'(x) = \frac{2x - 4x^2 - 2 + 4x + 2x^2 - 4x + 6}{(1 - 2x)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 4}{(1 - 2x)^2}$$

On peut également écrire (pour faciliter le calcul de discriminant qui viendra pour l'étude de signes de la dérivée) :

$$f'(x) = 2 \times \frac{-x^2 + x + 2}{(1-2x)^2}$$

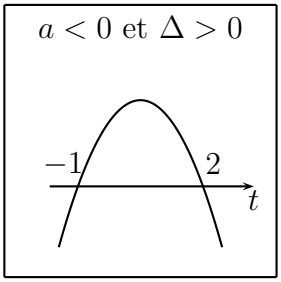
3. On a vu précédemment que $f'(x) = 2 \times \dfrac{-x^2 + x + 2}{(1-2x)^2}$. Comme cette expression est le produit de 2 par un quotient, on va déterminer le signe de $f'(x)$ en dressant un tableau de signes. Pour cela, on a besoin de :

   - Le nombre 2 est toujours strictement positif.

   - Signe de $-x^2 + x + 2$?
   On calcule le discriminant de ce polynôme de degré 2 : $\Delta = 1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 1 + 8 = 9$.
   Comme $\Delta > 0$, on obtient deux solutions réelles pour l'équation $-x^2 + x + 2 = 0$:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times (-1)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

   Comme $a = -1 < 0$ et $\Delta = 9 > 0$, la parabole d'équation $y = -x^2 + x + 2$ est représentée sous cette forme :



   Par lecture graphique, on peut affirmer que $-x^2 + x + 2 > 0$ ssi $-1 < x < 2$.

   • L'expression $(1-2x)^2$ est toujours positive ou nulle sur $\mathbb{R}$ car le carré d'un réel est toujours positif ou nul. Ici on peut même remarquer que $(1-2x)^2 > 0$ pour tout $x \in D_f$ puisque $(1-2x)^2 = 0$ ssi $1 - 2x = 0$ ssi $x = \frac{1}{2}$.

   - Conclusion. Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
2		$+$		$+$		$+$		$+$	
$-x^2+x+2$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$(1-2x)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$

   Quelques précisions sur les valeurs au bout des flèches. On a :

   ► $f(-1) = \dfrac{(-1)^2 - 2 \times (-1) + 3}{1 - 2 \times (-1)} = \dfrac{1+2+3}{1+2} = \dfrac{6}{3} = 2$;

   ► $f(2) = \dfrac{2^2 - 2 \times 2 + 3}{1 - 2 \times 2} = \dfrac{4-4+3}{1-4} = \dfrac{3}{-3} = -1$;

▶ Explications des limites en $\pm\infty$:

Pour contourner la forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ » , on modifie l'écriture de $f(x)$ pour tout réel x différent de $\frac{1}{2}$ et de 0 :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{1 - 2x} = \frac{x\left(x - 2 + \frac{3}{x}\right)}{x\left(\frac{1}{x} - 2\right)} = \frac{x - 2 + \frac{3}{x}}{\frac{1}{x} - 2}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(x - 2 + \dfrac{3}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = 0 - 2 = -2$. Donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

En suivant le même raisonnement, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - 2 + \dfrac{3}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 2\right) = -2$, ce qui permet de conclure à $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

▶ Explications des limites en $\frac{1}{2}$:

Commençons par la limite quand $x \longrightarrow \left(\dfrac{1}{2}\right)^-$, càd lorsque $x \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ avec $x < \dfrac{1}{2}$. Pour cela, on a $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} (x^2 - 2x + 3) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \dfrac{1}{2} + 3 = \dfrac{1}{4} - 1 + 3 = \dfrac{9}{4}$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} (1 - 2x) = 1 - 2 \times \dfrac{1}{2} = 0$.

Donc, par quotient, $f(x)$ va tendre vers l'infini... mais il faut faire une règle des signes pour savoir si c'est $-\infty$ ou $+\infty$. Cela nous ramène à voir si $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} (1 - 2x) = 0^+$ ou 0^-.

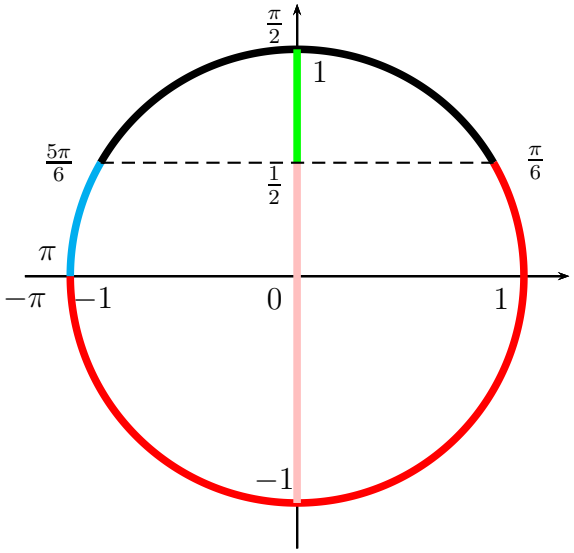
En fait, lorsque $x < \dfrac{1}{2}$, on a $2x < 1$ et donc $0 < 1 - 2x$, ce qui signifie que $1 - 2x > 0$. Par conséquent, $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} (1 - 2x) = 0^+$ et, comme $\dfrac{9}{4} > 0$, on a par quotient $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^-} f(x) = +\infty$.

En procédant de façon analogue, on montre que $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} (x^2 - 2x + 3) = \dfrac{9}{4} > 0$ et $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} (1 - 2x) = 0^-$, ce qui implique par quotient $\lim\limits_{x\to(\frac{1}{2})^+} f(x) = -\infty$.

Exercice 3 ($\simeq 9,5$ points).

1. Résolution sur $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation : $\quad 2\sin x - 1 < 0$.

   On a $2\sin x - 1 < 0$ si et seulement si $2\sin x < 1$, ssi $\sin x < \dfrac{1}{2}$.
   Par lecture du cercle trigo et en n'oubliant pas qu'on travaille sur $[-\pi;\pi]$:



   on constate alors que :
   $\sin x < \dfrac{1}{2}$ (zone rose) si et seulement si $-\pi \leqslant x < \dfrac{\pi}{6}$ (zone rouge)
   ou $\dfrac{5\pi}{6} < x \leqslant \pi$ (zone bleue).

   Autrement dit, l'ensemble S des solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation $2\sin x - 1 < 0$ est

$$S = \left[-\pi;\frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6};\pi\right].$$

2. Résolution sur $[0;\pi]$ de l'inéquation : $\quad 2\cos(4x) + \sqrt{2} > 0$

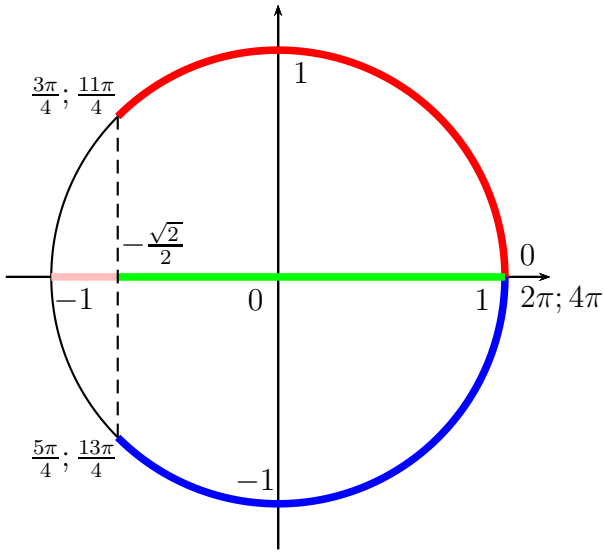
   Pour tout $x \in [0;\pi]$, on a : $2\cos(4x) + \sqrt{2} > 0$ ssi $2\cos(4x) > -\sqrt{2}$, ssi $\cos(4x) > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   Posons $t = 4x$. Comme $x \in [0;\pi]$, on a $4x \in [0;4\pi]$ et donc $t \in [0;4\pi]$.

   Considérons alors l'inéquation $\cos t > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour tout $t \in [0;4\pi]$ et travaillons avec un cercle trigo.
   Remarquons d'abord que, pour tout $t \in [0;4\pi]$, on a :

$$\cos(t) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ssi } t = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } t = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi = -\frac{3\pi}{4} + \frac{8\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$
$$\text{ou } t = \frac{3\pi}{4} + 2\pi = \frac{11\pi}{4} \text{ ou } t = \frac{5\pi}{4} + 2\pi = \frac{13\pi}{4}.$$

   De plus, quand t parcourt $[0;4\pi]$, cela correspond à deux tours de cercle trigo.



On constate alors que $\cos(t) > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ (zone verte) si et seulement si $0 \leqslant t < \dfrac{3\pi}{4}$ (zone rouge lors du premier tour) ou $\dfrac{5\pi}{4} < t < \dfrac{11\pi}{4}$ (zone bleue en fin de premier tour puis zone rouge de début du second tour) ou $\dfrac{13\pi}{4} < t \leqslant 4\pi$ (zone bleue de fin de second tour).

Si on revient à x (avec $t = 4x$), on obtient :

$$2\cos(4x) + \sqrt{2} > 0 \text{ ssi } \cos(4x) > -\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\text{ssi } 0 \leqslant 4x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < 4x < \frac{11\pi}{4} \text{ ou } \frac{13\pi}{4} < 4x \leqslant 4\pi,$$

$$\text{ssi } 0 \leqslant x < \frac{3\pi}{16} \text{ ou } \frac{5\pi}{16} < x < \frac{11\pi}{16} \text{ ou } \frac{13\pi}{16} < x \leqslant \pi.$$

Autrement dit, l'ensemble des solutions sur $[0;\pi]$ de l'inéquation $2\cos(4x) + \sqrt{2} > 0$ est

$$\left[0; \frac{3\pi}{16}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{16}; \frac{11\pi}{16}\right[\cup \left]\frac{13\pi}{16}; \pi\right].$$

3. Résolution sur $[0;2\pi]$ de l'équation : $1 - 3\tan^2 x = 0$.

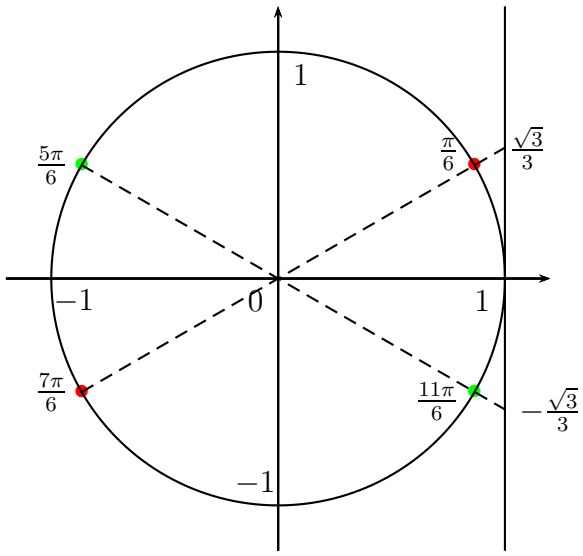
Tout d'abord, on constate que $1 - 3\tan^2 x = 0$ si et seulement si $1 = 3\tan^2 x$, ssi $\tan^2 x = \dfrac{1}{3}$, ssi $\left(\tan x = \sqrt{\dfrac{1}{3}} \text{ ou } \tan x = -\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$.

Or

$$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

D'où $1 - 3\tan^2 x = 0$ si et seulement si $\left(\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \text{ ou } \tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Par lecture du cercle trigo et en n'oubliant pas qu'on travaille sur $[0;2\pi]$:



on obtient : $\tan x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ssi $x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi = \dfrac{7\pi}{6}$ (voir points rouges)

et $\tan x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ssi $x = \dfrac{5\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6} + \pi = \dfrac{11\pi}{6}$ (voir points verts).

Autrement dit, l'ensemble des solutions sur $[0; 2\pi]$ de l'équation $1 - 3\tan^2 x = 0$ est

$$S = \left\{ \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}.$$

Fin du corrigé