Remarque générale. Ce n'est pas parce qu'il s'agit d'un devoir de Maths qu'il faut négliger le français. De nombreuses copies sont truffées de fautes d'orthographe et cela n'est pas acceptable. Ce n'est pas un hasard si la consigne « La qualité de la rédaction sera prise en compte dans l'attribution de la note » est mentionnée en haut de l'énoncé.

Exercice 1.

1. Notons X la variable aléatoire comptant le nombre d'étudiants, sur les cinq interrogés, qui ont eu un exercice de probabilités.
   On sait que l'examinateur possède 51 exercices différents dont 6 concernent des probabilités. La probabilité qu'un étudiant tombe sur un exercice de probas est donc $p = \frac{6}{51} = \frac{2\times 3}{3\times 17} = \frac{2}{17}$.
   De plus, le tirage d'un exercice est, selon l'énoncé, indépendant des tirages précédents. Par conséquent, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n = 5$ (le nombre d'étudiants interrogés) et $p = \frac{2}{17}$ (la probabilité de tomber sur un exercice de probas).

   Attention. Il est essentiel de commencer cette question en définissant la variable aléatoire X qui compte le nombre d'étudiants tombant sur un exercice de probabilités. On ne peut pas se contenter d'un « on a ici une loi binomiale... » sans avoir défini X.

   Ainsi, la probabilité qu'un exercice de probabilités tombe au moins une fois durant cette matinée est :
   $$P[X \geqslant 1] \simeq 0,465$$
   résultat obtenu à la calculatrice et arrondi au millième.

   Remarque. Selon la calculatrice utilisée, cette proba se calcule directement ou en utilisant l'égalité suivante : $P[X \geqslant 1] = 1 - P[X = 0]$.

2. a) Notons encore X la variable aléatoire comptant le nombre d'étudiants, sur les n interrogés, qui ont eu un exercice de probabilités. En s'appuyant sur le même raisonnement qu'à la question 1, on peut affirmer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres n (le nombre d'étudiants interrogés) et $p = \frac{2}{17}$.
   Le fait qu'en moyenne 10 étudiants soient interrogés sur un exercice de probabilités se traduit par $E(X) = 10$.
   Or l'espérance de X est égale à : $E(X) = n \times p = \frac{2n}{17}$.
   Alors $E(X) = 10$ si et seulement si $\frac{2n}{17} = 10$, ssi $n = \frac{10\times 17}{2} = 5 \times 17 = 85$.
   Conclusion. L'examinateur doit faire passer 85 étudiants pour qu'en moyenne 10 étudiants soient interrogés sur un exercice de probabilités.

   b) Le fait d'avoir plus de 95% de chance qu'au moins un exercice de probabilités soit tiré au cours de cette période se traduit par la condition : $P[X \geqslant 1] \geqslant 0,95$.

   Or $P[X \geqslant 1] \geqslant 0,95$
   ssi $1 - P[X = 0] \geqslant 0,95$
   ssi $P[X = 0] \leqslant 0,05$.

   Maintenant, $X = 0$ signifie qu'aucun exercice de probas n'est tombé et donc que chacun des n étudiants a eu un exercice qui n'est pas de probas. De plus, la probabilité de tomber sur un exercice

qui n'est pas de probas est $1-p=1-\dfrac{2}{17}=\dfrac{15}{17}$. Donc $P[X=0]=\left(\dfrac{15}{17}\right)^n$. Par conséquent,

$P[X \geqslant 1] \geqslant 0,95$ ssi $\left(\dfrac{15}{17}\right)^n \leqslant 0,05$

ssi $\ln\left(\left(\dfrac{15}{17}\right)^n\right) \leqslant \ln(0,05)$ car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$

ssi $n \times \ln\left(\dfrac{15}{17}\right) \leqslant \ln(0,05)$ car $\ln(x^n) = n\ln x$ pour tout $x>0$

ssi $n \geqslant \dfrac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{15}{17}\right)}$ avec changement de sens de l'inégalité car $\dfrac{15}{17}<1$ et donc $\ln\left(\dfrac{15}{17}\right)<0$.

Or la calculatrice nous donne : $\dfrac{\ln(0,05)}{\ln\left(\frac{15}{17}\right)} \simeq 23,9$.

Conclusion. n étant un entier, l'examinateur doit faire passer au moins 24 étudiants pour avoir plus de 95% de chance qu'au moins un exercice de probabilités soit tiré au cours de cette période.

Exercice 2.

1. X est la variable aléatoire comptant le nombre de feux verts rencontrés par l'étudiant lors de son trajet.
   Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est de $p = \frac{2}{3}$.
   Les feux étant non synchronisés, cela signifie que la couleur d'un feu est indépendante de celles des autres feux.
   Par conséquent, X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres $n = 5$ (le nombre de feux rencontrés) et $p = \frac{2}{3}$ (la probabilité qu'un feu soit au vert).

2. On note T la variable aléatoire « temps en minutes » mis par l'étudiant pour se rendre à l'IUT.
   La vitesse de l'étudiant est de 30 km/h. Il met donc 60 minutes pour faire 30 km, et donc il met 6 minutes pour faire 3 km. Ainsi, si tous les feux sont au vert (c'est-à-dire si $X = 5$), l'étudiant met 6 minutes à se rendre à l'IUT. Alors $T = 6$ et $P[T = 6] = P[X = 5]$.
   Maintenant, s'il rencontre un seul feu rouge (c'est-à-dire si $X = 4$), l'étudiant perd une minute et met 7 minutes à se rendre à l'IUT. Alors $T = 7$ et $P[T = 7] = P[X = 4]$.
   Et ainsi de suite... On a alors :
   $P[T = 8] = P[X = 3]$
   $P[T = 9] = P[X = 2]$
   $P[T = 10] = P[X = 1]$
   $P[T = 11] = P[X = 0]$.

   Remarque. En fait, il suffisait de remarquer que le nombre de feux rouges rencontrés (égal à $5 - X$) était égal au nombre de minutes supplémentaires mises par l'étudiant. Donc $T = 6+(5-X) = 11-X$.

   La loi de probabilité de X est donnée par le tableau suivant :

k	6	7	8	9	10	11
$P[T = k]$	$P[X = 5]$	$P[X = 4]$	$P[X = 3]$	$P[X = 2]$	$P[X = 1]$	$P[X = 0]$
$P[T = k]$	$0,132$	$0,329$	$0,329$	$0,165$	$0,041$	$0,004$

   la dernière ligne ci-dessus étant trouvée à la calculatrice en utilisant la loi binomiale de X et les résultats étant arrondis au millième.

3. L'étudiant part 7 minutes avant le début des cours. La probabilité d'arriver en retard est $P[T \geqslant 8] = P[X \leqslant 3] \simeq 0,539$ le dernier résultat étant trouvé à la calculatrice en utilisant la loi binomiale de X.

4. L'espérance de la variable aléatoire T est égal à :

$$E(T) = E(11 - X) = 11 - E(X) = 11 - n \times p = 11 - 5 \times \frac{2}{3} = \frac{33 - 10}{3} = \frac{23}{3}.$$

   Remarque. En utilisant les valeurs approchées du tableau obtenu à la question 2, on obtient un résultat légèrement erroné. En effet, on obtient $E(T) \simeq 7,666$ alors qu'en fait $E(T) = \frac{23}{3} \simeq 7,667$.

Exercice 3.

1. Compte tenu de la définition de la fonction f, on est sûr que f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être aux abscisses $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

   Remarque. En fait, f est continue sur $\mathbb{R}$ (mais on n'était pas obligé d'aller le démontrer). En effet :
   - pour $t = -\frac{\pi}{2}$, on a $k\cos t = k \times 0 = 0$;
   - pour $t = \frac{\pi}{2}$, on a $k\cos t = k \times 0 = 0$.

   Par ailleurs, par lecture du cercle trigo, on constate que $\cos t$ est toujours positif ou nul pour tout t vérifiant $-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. On doit donc imposer que k soit positif pour garantir que la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Enfin, calculons maintenant $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ qui correspond à l'aire située entre la courbe de f et l'axe des abscisses.

   $$\mathcal{A} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} k\cos t\,\mathrm{d}t.$$

   Par linéarité,

   $$\mathcal{A} = k \times \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\,\mathrm{d}t = k \times \Big[\sin t\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = k \times \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

   Or, par lecture du cercle trigo, on obtient $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$. D'où

   $$\mathcal{A} = k \times (1+1) = 2k.$$

   Par conséquent, f est une densité de probabilité ssi $\mathcal{A} = 1$, ssi $2k = 1$, ssi $k = \dfrac{1}{2}$.

2. On veut déterminer le réel a vérifiant $P\Big[-a \leqslant X \leqslant a\Big] = \dfrac{1}{2}$.

   Comme $P\Big[-\frac{\pi}{2} \leqslant X \leqslant \frac{\pi}{2}\Big] = 1$, on a forcément $0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$. Par conséquent,

   $$P\Big[-a \leqslant X \leqslant a\Big] = \int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-a}^{a} k\cos t\,\mathrm{d}t = k \times \int_{-a}^{a} \cos t\,\mathrm{d}t$$

   Donc

   $$P\Big[-a \leqslant X \leqslant a\Big] = \frac{1}{2} \times \int_{-a}^{a} \cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} \times \Big[\sin t\Big]_{-a}^{a} = \frac{1}{2} \times \Big(\sin(a) - \sin(-a)\Big).$$

   Or la fonction sinus est impaire. Donc $\sin(-x) = -\sin x$ pour tout réel x.
   D'où

   $$P\Big[-a \leqslant X \leqslant a\Big] = \frac{1}{2} \times \Big(\sin(a) + \sin(a)\Big) = \frac{1}{2} \times 2\sin(a) = \sin a.$$

   Finalement, $P\Big[-a \leqslant X \leqslant a\Big] = \dfrac{1}{2}$ ssi $\sin a = \dfrac{1}{2}$, ssi $a = \dfrac{\pi}{6}$
   la dernière égalité provenant de la lecture du cercle trigo et du fait que l'on cherche a tel que $0 \leqslant a \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Exercice 4 ($\simeq$ 2 points). X suit la loi normale de paramètres $m = 120$ et d'écart-type σ. On veut déterminer σ pour que $P\Big[100 \leqslant X \leqslant 140\Big] = 0,92$.

Posons $Y = \dfrac{X-m}{\sigma} = \dfrac{X-120}{\sigma}$ de sorte que $Y \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Or $100 \leqslant X \leqslant 140$ ssi $100-120 \leqslant X-120 \leqslant 140-120$

ssi $-20 \leqslant X-120 \leqslant 20$

ssi $\dfrac{-20}{\sigma} \leqslant \dfrac{X-120}{\sigma} \leqslant \dfrac{20}{\sigma}$ car $\sigma > 0$

ssi $\dfrac{-20}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \dfrac{20}{\sigma}$.

Par conséquent, $P\Big[100 \leqslant X \leqslant 140\Big] = 0,92$ ssi $P\left[\dfrac{-20}{\sigma} \leqslant Y \leqslant \dfrac{20}{\sigma}\right] = 0,92$.

La calculatrice permet de déterminer le réel t vérifiant $P\Big[-t \leqslant Y \leqslant t\Big] = 0,92$. On trouve $t \simeq 1,750686$.

Par conséquent, on a $\dfrac{20}{\sigma} \simeq 1,750686$.

D'où $\sigma \simeq \dfrac{20}{1,750686} \simeq 11,42$.

Remarque. Ce n'est pas parce qu'il est demandé d'arrondir le résultat final au centième qu'il faut arrondir tous les résultats intermédiaires au centième. En effet, si on arrondit à chaque calcul intermédiaire, on propage l'erreur commise en arrondissant et cette erreur est susceptible de grandir à chaque calcul effectué ensuite. Ici, si on se contente de $t \simeq 1,75$ on obtient $\sigma \simeq \dfrac{20}{1,75} \simeq 11,43$.

Exercice 5 ($\simeq 5,5$ points).

1. Dans cette question, $n = 300$.

   a) X compte le nombre de gauchers parmi $n = 300$ Français. La proportion de gauchers dans la population est $p = \frac{10}{100} = 0,1$. Le prélèvement des n Français étant assimilé à n tirages successifs avec remise, cela signifie que les tirages successifs sont indépendants les uns des autres.
   Ainsi X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ de paramètres $n = 300$ (le nombre de Français prélevés) et $p = 0,1$ (la proportion de gauchers).

   b) La probabilité pour qu'on ait au moins 13% de gauchers dans l'échantillon est :

   $$P\left[X \geqslant \frac{13}{100} \times 300\right] = P\Big[X \geqslant 39\Big] \simeq 0,055$$

   résultat obtenu à la calculatrice et arrondi à 10^{-3} près.

   Remarque. Selon la calculatrice utilisée, cette proba se calcule directement ou en utilisant l'égalité suivante : $P[X \geqslant 39] = 1 - P[X \leqslant 38]$.

   c) La probabilité pour qu'on ait entre 7% et 13% de gauchers dans l'échantillon est :

   $$P\left[\frac{7}{100} \times 300 \leqslant X \leqslant \frac{13}{100} \times 300\right] = P\Big[21 \leqslant X \leqslant 39\Big] \simeq 0,934$$

résultat obtenu à la calculatrice et arrondi à 10^{-3} près.

Remarque. Selon la calculatrice utilisée, cette proba se calcule directement ou en utilisant l'égalité suivante : $P[21 \leqslant X \leqslant 39] = P[X \leqslant 39] - P[X \leqslant 20]$.

2. Dans cette question, on revient au cas général où $100 \leqslant n \leqslant 3000$.

a) En suivant la même argumentation qu'à la question 1.a), on peut affirmer que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ de paramètres n (le nombre de Français prélevés) et $p = 0,1$ (la proportion de gauchers).

Or, ici, on a les trois conditions :

- ▶ $n \geqslant 100 \geqslant 30$;
- ▶ $np \geqslant 100 \times 0,1 \geqslant 10 \geqslant 5$;
- ▶ $n(1-p) \geqslant 100 \times 0,9 \geqslant 90 \geqslant 5$.

On peut donc appliquer le théorème de Moivre-Laplace, ce qui permet d'approcher la loi binomiale de X par la loi normale $\mathcal{N}(np; np(1-p))$, c'est-à-dire par la loi normale $\mathcal{N}(0,1n; 0,09n)$.

b) Détermination de la taille de l'échantillon pour qu'on ait entre 7% et 13% de gauchers dans l'échantillon avec une probabilité environ égale à $0,99$.

On cherche donc n tel que $\quad P\left[\dfrac{7}{100} \times n \leqslant X \leqslant \dfrac{13}{100} \times n\right] \simeq 0,99$

c'est-à-dire tel que $\quad P\Big[0,07n \leqslant X \leqslant 0,13n\Big] \simeq 0,99$.

Notons Y une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1n; 0,09n)$.

D'après la question 2.a), $\quad P\Big[0,07n \leqslant X \leqslant 0,13n\Big] \simeq 0,99$ ssi $P\Big[0,07n \leqslant Y \leqslant 0,13n\Big] \simeq 0,99$.

Posons $Z = \dfrac{Y - 0,1n}{\sqrt{0,09n}} = \dfrac{Y - 0,1n}{0,3\sqrt{n}}$ de sorte que $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$.

Alors $0,07n \leqslant Y \leqslant 0,13n \quad$ ssi $\quad -0,03n \leqslant Y - 0,1n \leqslant 0,03n$

$$\text{ssi} \quad -\frac{0,03n}{0,3\sqrt{n}} \leqslant \frac{Y - 0,1n}{0,3\sqrt{n}} \leqslant \frac{0,03n}{0,3\sqrt{n}}$$

$$\text{ssi} \quad -\frac{\sqrt{n}}{10} \leqslant Z \leqslant \frac{\sqrt{n}}{10}$$

Autrement dit, on cherche n tel que $\quad P\left[-\dfrac{\sqrt{n}}{10} \leqslant Z \leqslant \dfrac{\sqrt{n}}{10}\right] \simeq 0,99.$

Or la calculatrice nous permet de trouver u tel que $P[-u \leqslant Z \leqslant u] \simeq 0,99$. On trouve $u \simeq 2,575829$.

D'où $\dfrac{\sqrt{n}}{10} = u$, c'est-à-dire $\sqrt{n} = 10u$, càd $n = \Big(10u\Big)^2 = 100u^2$.

En utilisant la valeur précédente de u, on obtient $n \simeq 663,49$. Ainsi, comme n est un entier, on arrondit à l'entier le plus proche et on prend $n = 663$.

FIN DU CORRIGÉ