I.U.T. de Brest — Année 2026-2027
G.M.P. 3 — Devoir du 23/09/2026
R5.04 - Mathématiques — Durée : 1h30

Documents et matériel autorisés :
1. calculatrice – 2. formulaire distribué en début de première année – 3. polycopié de cours (le bleu).

Téléphones et TD interdits.

La qualité de la rédaction, notamment le soin apporté à justifier ou expliquer un résultat, sera prise en compte dans l'attribution de la note.

Exercice 0. Donner le nom complet de la calculatrice utilisée pour faire ce devoir.

Exercice 1 ($\simeq 3,75$ points). Lors d'un examen de mathématiques d'une promotion d'étudiants, chaque étudiant doit passer un oral avec un même examinateur.

On sait que l'examinateur possède 51 exercices différents dont 6 concernent des probabilités.

Pour chaque étudiant, l'examinateur choisit au hasard un de ses 51 exercices et ce, indépendamment des exercices précédemment tirés.

1. L'examinateur fait passer 5 étudiants sur une matinée. Quelle est la probabilité, arrondie au millième, qu'un exercice de probabilités tombe au moins une fois durant cette matinée ?

2. Désormais, on considère que l'examinateur fait passer n étudiants sur une période donnée (avec n un entier naturel).

   a) Combien d'étudiants l'examinateur doit-il faire passer pour qu'en moyenne 10 étudiants soient interrogés sur un exercice de probabilités ?

   b) Combien d'étudiants l'examinateur doit-il faire passer pour avoir plus de 95% de chance qu'au moins un exercice de probabilités soit tiré au cours de cette période ? Il est demandé ici de faire un raisonnement ; il ne s'agit pas de tester des valeurs à la calculatrice et de voir si cela convient.

Exercice 2 ($\simeq 5,75$ points). Un étudiant se rend à vélo à l'IUT, distant de 3km de chez lui, à une vitesse constante de 30km/h. Sur le parcours, il rencontre 5 feux non synchronisés.

Pour chaque feu, la probabilité qu'il soit au vert est de $\frac{2}{3}$, au rouge $\frac{1}{3}$.

Un feu vert ne ralentit pas l'étudiant, un feu rouge lui fait perdre une minute.

Les résultats seront arrondis au millième.

1. On note X la variable aléatoire comptant le nombre de feux verts rencontrés par l'étudiant lors de son trajet. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. On note T la variable aléatoire « temps en minutes » mis par l'étudiant pour se rendre à l'IUT. Déterminer la loi de probabilité de T.

3. L'étudiant part 7 minutes avant le début des cours. Quelle est la probabilité d'arriver en retard ?

4. Calculer l'espérance de la variable aléatoire T.

Tournez la page s.v.p. →

Exercice 3 ($\simeq 3$ points). Le nombre k étant une constante réelle, considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} k\cos t & \text{si } -\dfrac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel k pour que f soit une densité de probabilité.

2. Dans cette question, on prend pour k la valeur trouvée à la question 1 et on considère X une variable aléatoire continue de densité f.

   Déterminer le réel a de sorte que $P\Big[-a \leqslant X \leqslant a\Big] = \dfrac{1}{2}$.

   Il est demandé de s'appuyer sur un raisonnement et de donner la valeur exacte du réel a.

Exercice 4 ($\simeq 2$ points). On considère une variable aléatoire X qui suit la loi normale de paramètres $m = 120$ et d'écart-type σ.

Déterminer σ pour que $P\Big[100 \leqslant X \leqslant 140\Big] = 0,92$.

Le résultat sera arrondi au centième. Il est demandé ici de faire un raisonnement ; il ne s'agit pas de tester des valeurs à la calculatrice et de voir si cela convient.

Exercice 5 ($\simeq 5,5$ points). On considère qu'il y a 10% de gauchers dans la population française.

On prélève au hasard n Français, où n est un entier naturel compris entre 100 et 3000, et on note X le nombre de gauchers dans cet échantillon.

La taille de la population est supposée suffisamment grande pour que ce prélèvement de n Français puisse être assimilé à n tirages successifs avec remise.

1. Dans cette question, $n = 300$.

   a) Quelle loi suit la variable aléatoire X ?

   b) Déterminer la probabilité pour qu'on ait au moins 13% de gauchers dans l'échantillon (arrondir à 10^{-3} près).

   c) Déterminer la probabilité pour qu'on ait entre 7% et 13% de gauchers dans l'échantillon (arrondir à 10^{-3} près).

2. Dans cette question, on revient au cas général où $100 \leqslant n \leqslant 3000$.

   a) Par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X ?

   b) Déterminer la taille de l'échantillon pour qu'on ait entre 7% et 13% de gauchers dans l'échantillon avec une probabilité environ égale à $0,99$. Il est demandé ici de faire un raisonnement ; il ne s'agit pas de tester des valeurs à la calculatrice et de voir si cela convient.

FIN DU DEVOIR